Институт физики АН Латвийской ССР

ДЕВЯТОЕ РИЖСКОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

I

Общие и теоретические вопросы

Тезисы докладов

Саласпилс 1978

М.Я.Антимиров

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ МГД-ТЕЧЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ ВРАЩЕНИИ ШАРА

Решение задачи о МГД-течении, возникающем при медленном вращении проводящего шара в проводящей жидкости, изучалось различными авторами в приближении больших и малых чисел Гартмана (см., например, /I/). Ниже приводится точное решение рассмотренной в /I/ задачи для случая непроводящего шара, справедливое для всех чисел Гартмана.

Непроводящий шар радиуса R вращается в проводящей жидкости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z в однородном внешнем магнитном поле $\vec{B}^e=\{0, 0, B_0\}$, направленном по оси вращения. Система уравнений магнитной гидродинамики, записанная в сферических координатах r, θ, φ, (см./2/) при пренебрежении квадратичными членами имеет в области вне шара точное решение вида

$$\vec{v}=\{0, 0, v_\varphi(r,\theta)\}; \quad \vec{B}=\vec{B}^e+\vec{B}^i=$$
$$=\{B_0\cos\theta, -B_0\sin\theta, b_\varphi(r,\theta)\}; \quad P_m=const, \tag{I}$$

$\vec{B}^i$ - индуцированное магнитное поле, P_m - полное давление.

Отметим, что подстановка (I) (при $P_m=P_m(r,\theta)$) в полную систему уравнений магнитной гидродинамики дает при проецировании на направление φ ту же систему уравнений для v_φ и b_φ, что и стоксово приближение, но при проецировании на направления r и θ получаются еще два уравнения для P_m, v_φ^2 и b_φ^2, исключение из которых P_m приводит к третьему уравнению для v_φ и b_φ, несовместному с двумя другими. Поэтому нужно пренебречь членами v_φ^2 и b_φ^2, и тогда $P_m=const$.

В безразмерных величинах (масштабы длины, скорости, магнитного поля и давления есть R, ωR, $\omega R\sqrt{\rho\nu\sigma}$, $\rho\nu\omega$, ν - кинематическая вязкость, $Ha=B_0R\sqrt{\sigma/\rho\nu}$ - число

Гартмана) решение имеет вид:

$$v_\varphi(r,\theta)=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{2\mu r}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\mu r\cos\theta}-(-1)^n e^{\mu r\cos\theta}\right]\times$$

$$\times(2n+1)\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\mu)}{K_{n+\frac{1}{2}}(\mu)}K_{n+\frac{1}{2}}(\mu r)P_n^1(\cos\theta),\quad (2\mu=Ha), \tag{2}$$

где $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$, $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ – модифицированные функции Бесселя, $P_n^1(\cos\theta)=-\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$, $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра. Выражение для $b_\varphi(r,\theta)$ получается из $v_\varphi(r,\theta)$ заменой знака минус на плюс в квадратной скобке.

Момент вращения $\mathcal{L}$ в размерных величинах равен

$$\mathcal{L}=-2\pi R^3\eta\omega\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)\Big|_{r=1}\sin^2\theta\, d\theta=$$

$$=2\pi R^3\eta\omega\left[2-\frac{\pi}{\mu^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)(2n+1)\frac{K'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)}{K_{n+\frac{1}{2}}(\mu)}I^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu)\right]. \tag{3}$$

Из (2) и (3) найдены асимптотические выражения для v_φ и $\mathcal{L}$ при малых и больших Ha.

Лит.: 1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. ЖТФ, 1960, XXX, 9, 1067. 2. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига, "Зинатне", 1976.