

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Elektronikas un Telekomunikāciju fakultāte
Radioelektronikas institūts

Māris TĒRAUDS

Doktora studiju programmas „Radioelektronika” doktorants

**JAUNA VEIDA DISKRĒTIE ORTOGONĀLIE PĀRVEIDOJUMI UN
AR SIGNĀLU APSTRĀDES PIELIETOJUMIEM SAISTĪTĀS
KĻŪDAS**

Promocijas darba kopsavilkums

Zinātniskais vadītājs
Dr. sc. ing., profesors
P.MISĀNS

Rīga 2009

UDK 621.391 (043.2)
Tē 607 j

Tērauds M. Jauna veida diskrētie ortogonālie pārveidojumi un ar signālu apstrādes pielietojumiem saistītās kļūdas. Promocijas darba kopsavilkums.-R.:RTU, 2009.-54 lpp.

Iespiests saskaņā ar ETF

.....
.....
.....
.....



Šis darbs izstrādāts ar Eiropas Sociālā fonda atbalstu projektā „Atbalsts RTU doktora studiju īstenošanai”.

Šis darbs izstrādāts ar Eiropas Sociālā fonda atbalstu Nacionālās programmas “Atbalsts doktorantūras programmu īstenošanai un pēcdoktorantūras pētījumiem” projekta “Atbalsts RTU doktorantūras attīstībai” ietvaros .

ISBN

.....

**PROMOCIJAS DARBS
IZVIRZĪTS INŽENIERZINĀTŅU
DOKTORA GRĀDA IEGŪŠANAI RĪGAS TEHNISKAJĀ
UNIVERSITĀTĒ**

Promocijas darbs inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai tiek publiski aizstāvēts 2009.gada 15.septembrī plkst. 18.00 Rīgas Tehniskās universitātes Elektronikas un Telekomunikāciju fakultātē, Āzenes ielā 12, 210 auditorijā.

OFICIĀLIE RECENZENTI

Profesors, Dr.sc.ing. Guntars Balodis
Rīgas Tehniskā universitāte

Dr.sc.comp. Modris Greitāns
Elektronikas un datorzinātņu institūts, direktors

Dr.phys. Alberts Kristiņš
LU Cietvielu fizikas institūts, Radioelektronikas nodaļas vadītājs

APSTIPRINĀJUMS

Apstiprinu, ka esmu izstrādājis doto promocijas darbu, kas iesniegts izskatīšanai Rīgas Tehniskajā universitātē inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai. Promocijas darbs nav iesniegts nevienā citā universitātē zinātniskā grāda iegūšanai.

Māris Tērauds(Paraksts)

Datums:

Promocijas darbs ir uzrakstīts latviešu valodā, satur ievadu, 5 nodaļas, nobeigumu, literatūras sarakstu, 12 pielikumus, 66 zīmējumus un ilustrācijas, kopā 234 lappuses. Literatūras sarakstā ir 134 nosaukumi.

Saturs

<i>Saturs</i>	4
<i>Tēmas aktualitāte</i>	5
<i>Darba mērķis</i>	6
<i>Pētījuma metodika</i>	7
<i>Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti</i>	7
<i>Aizstāvamās tēzes</i>	10
<i>Darba praktiskais pielietojums</i>	10
<i>Darba aprobācija</i>	11
<i>1. Zināmo ātro ortogonālo pārveidojumu apskats</i>	14
<i>2. RABOT pārveidojumi</i>	16
<i>3. RABOT sintēzes metožu apkopojums, salīdzinājums</i>	23
<i>4. RABOT pārveidojuma kvantēšanas kļūdu analīze</i>	31
<i>5. RABOT pārveidojumu praktiskā realizācija</i>	41
<i>Secinājumi</i>	45
<i>Darbā izmantoto saīsinājumu saraksts</i>	49
<i>Izmantotās literatūras saraksts</i>	52

Tēmas aktualitāte

Šis darbs ir veltīts RABOT¹ leņķiskajiem pārveidojumiem. Vispār, leņķi kā parametri nav jaunums, tie tiek pielietoti Givensa rotācijā, SVD² un EVD³ piemeklēšanas algoritmos. RABOT apakšklases CRAOT⁴ un CRAIMOT⁵ pirmoreiz ir aprakstījis Endrjū (Andrews) kā vispārināto Kronekera matricu apakšklasi (ar nosaukumiem *Generalized Kronecker matrices*). Citas publikācijas par leņķisko pieeju, kā stūrakmeni ortogonālo pārveidojumu aprakstā un pielietojumos, promocijas darba izstrādes gaitā netika atrastas. Pētāmais pārveidojums ir parametrisks pārveidojums, kuram ir vairāki parametri (rotācijas leņķi). Tādēļ, hipotētiski, tas ļauj lielā mērā variēt pārveidojumu un to pielāgot tai vai citai signālu klasei. RABOT pārveidojumu klasei, līdzīgi kā Furjē (Hārtlī) pārveidojumam, eksistē ātrais algoritms.

Praktiski realizējot „leņķiskās” ierīces aparatūriski (piemēram, FPGA), ļoti aktuāla ir fiksētā punkta aritmētikas (FP Q1.x) operandu kvantēšanas izraisīto pārveidojumu kļūdu (QE) analīze. Eksistē rinda pētījumu, kas ir veltīti fiksētā punkta aritmētikas izraisītajām kļūdām ortogonālajos pārveidojumos. Kļūdas FFT⁶ pārveidojumos ir apskatījuši P.D. Welch, C. J. Weinstein, V. Oppenheim, D. V. James, R.Storn, R.W. Patterson, bet DCT⁷ pārveidojumos – I.D. Yun, S. U. Lee, G.S.Yovanof, S.Liu. Bijušajā PSRS ar kļūdu pētījumiem lineārajos pārveidojumos ir nodarbojušies V.Čaikovskis,

¹ *Rotation Angle Based Orthogonal Transform* - Ortogonālie pārveidojumi, balstīti uz rotāciju leņķiem.

² *Singular Value Decomposition* – Singulāro vērtību dekompozīcija.

³ *Eigenvalue Decomposition* – Īpašvērtību dekompozīcija.

⁴ *Constant Rotation Angle Orthogonal Transform* - Konstanta rotācijas leņķa ortogonāls pārveidojums.

⁵ *Constant Rotation Angle Inside Matrix Orthogonal Transform* - Ortogonāls pārveidojums ar konstantu rotācijas leņķi vienas matricas ietvaros.

⁶ *Fast Fourier Transform* – Ātrs Furjē pārveidojums.

⁷ *Discrete Cosine Transform* - Diskrētais kosinusa pārveidojums.

J.Šubss. E.Beķeris un P.Misāns vairākas publikācijas ir veltījuši maksimālajām spektru pārrēķinu kļūdām. P.Misāna promociju darbs bija veltīts lineāro pārveidojumu maksimālo un minimālo kļūdu novērtējuma vispārinājumiem, taču ne autora publikācijās, nedz arī promocijas darbā, ņemot vērā tā brīža tehnoloģisko attīstību, nav akcentētas fiksētā punkta aritmētikas kļūdas. Tiesa gan, jāatzīmē, ka minētajā darbā pirmoreiz ir izmantota leņķiskā pieeja kļūdas novērtējumam, bet kļūdu analīze ir veikta tikai, mainot signālvektora novietojumu (leņķus), Eiklīda telpā, bet ne pašus pārveidojumus. Pašreizējā signālu apstrādes attīstības etapā QE novērtējums ir ļoti aktuāls, jo bez tā nav iedomājama gandrīz nevienas signālu apstrādes ierīces izveide.

Provizoriski pētījumi rāda, ka leņķiskie pārveidojumi ir perspektīvi dažādu signālu analīzē/sintēzē, kompresijā un filtrācijā. Piemeklējot leņķus, var izvēlēties optimālus pārveidojumus gan no signālu analīzes/sintēzes viedokļa, gan arī no kompresijas un filtrācijas viedokļa. Bez tam, ļoti aktuāla ir arī optimālo leņķu (faktiski optimālā pārveidojuma) piemeklēšana no QE viedokļa, jo tas ļauj optimizēt reālo ierīču resursus (piemēram, FPGA gadījumā – loģisko šūnu skaitu) un jaudas patēriņu.

Darba mērķis

Šis darbs ir veltīts RABOT leņķiskajiem pārveidojumiem. Tas apkopo to sintēzes algoritmus un apraksta, kā tos var realizēt reālās iekārtās ar fiksētā punkta aritmētiku FP Q1.x, no izdalāmo vārda garuma viedokļa. Darba mērķis ir **apkopot RABOT rēķināšanas algoritmus, aprēķināt kvantēšanas kļūdas, dot ieskatu iespējamajos pielietojumos**. Lai sasniegtu šo mērķi, tika izvirzīti šādi pamatuzdevumi:

1. Veikt literatūras apskatu par ortogonālajiem signālu pārveidojumiem.

2. Veikt literatūras apskatu par leņķu pielietošanu signālu apstrādē.
3. Atrast, apkopot un salīdzināt iespējamās RABOT sintēzes metodes.
4. Analizēt RABOT pārveidojumu kļūdas.
5. Apskatīt iespējamās kļūdas samazināšanas iespējas.
6. Dot ieskatu RABOT funkciju īpašībās.

Pētījuma metodika

Kļūdu izpēte notika analītiski un skaitliski. Diemžēl, analītiskā kļūdu analīze mūsu gadījumā ir komplicēta un diezgan darbietilpīga. Turklāt, rezultātus varēja iegūt tikai dažiem specifiskiem gadījumiem. Zināms, ka skaitliskās metodes nedod izsmeļošu izskaidrojumu par pētāmo objektu, taču ļauj iegūt aptuvenas sakarības. Lai apkopotu rezultātus formulu veidā, eksperimenti dažādiem nolašu un ieejas leņķu komplektiem ir jāatkārto daudzas reizes, bet šī procedūra tika automatizēta. Skaitliskā izpētes metodika ir mazāk darbietilpīga un tāpēc tā šajā darbā dominē. Analītiskās un skaitliskās metodes tika realizētas ar paša izveidoto programmatūru MatLab valodā.

Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti

Promocijas darbā pirmo reizi ir apskatīti jautājumi, kas ir vēltīti, uz rotācijas leņķiem balstītiem, ātrajiem ortogonālajiem pārveidojumiem (RABOT transformācijām). Darba galvenās novitātes ir saistītas ar jaunu pārveidojumu ģenerācijas algoritmu izveidi un kļūdu, kas rodas šos pārveidojumus izmantojot, analīzi:

- Pirmo reizi tika izstrādāts sintēzes algoritms, kas ļauj sintezēt RABOT, CRMOT un RA-HT pārveidojumus ar vispārinātā *Kronekera* reizinājumu.

- Pirmo reizi tika izstrādāts sintēzes algoritms, kas ļauj sintezēt RABOT pārveidojumu bāzes funkcijas (*BF*) ar sinusu, kosinusu pakāpju reizinājumu.
- Pirmo reizi tika izpētītas kvantēšanas kļūdas RABOT pārveidojumiem.

Darbā ir iegūti šādi galvenie rezultāti:

- Veikts zināmo reālo (bet ne komplekso) diskrēto ortogonālo pārveidojumu konspektīvs apraksts, analīze un klasifikācija.
- Nodefinēti RABOT, CRAIMOT, CRMOT¹ un CRAOT pārveidojumi.
- Nodefinētas RABOT pārveidojumu īpašības.
- Apkopoti CRAOT, CRAIMOT, RABOT, CRMOT un RA-HT bāzes funkciju sintēzes algoritmi, izmantojot *FMP*² pieeju un parādīta signālu sintēzes un analīzes iespēja minētajās bāzēs ar šo pieeju.
- Apkopotas CRAOT, CRAIMOT bāzes funkciju sintēzes metodes ar *GKP*³, *SCP*⁴.
- Pirmo reizi iegūti RABOT, CRMOT un RA-HT⁵ bāzes funkciju sintēzes algoritmi ar *GKP*.
- Pirmo reizi iegūti RABOT un CRMOT bāzes funkciju sintēzes algoritmi ar *SCP*.
- Salīdzināti pēc operāciju skaita BF sintēzes algoritmi RABOT, CRMOT, CRAIMOT un CRAOT pārveidojumiem. Bez tam šis

¹ *Constant Rotation Matrix Orthogonal Transform* - Ortogonāls pārveidojums ar vienādām rotāciju matricām.

² *Factorized Matrix Product* – Faktorizēto matricu reizinājums.

³ *Generalized Kroneker Product* - Vispārinātais Kronekera reizinājums.

⁴ *Sine Cosine Power Product* – Sinusa un kosinusa pakāpju reizinājums.

⁵ *RABOT-Haar transform* - RABOT Hāra pārveidojums.

salīdzinājums veikts arī signālu analīzei un sintēzei minētajās bāzēs.

- Skaitliski ir analizētas fiksētā punkta aritmētikas operandu kvantēšanas izraisīto pārveidojumu kļūdas. Kļūdas ir analizētas, ņemot vērā katru no to rašanās posmiem (piemēram, aprēķinu posmā vai trigonometrisko funkciju formēšanas posmā) atsevišķi. Bez tam, ir analizēta arī summārā kļūda (ņemot vērā visus posmus). Tas ir veikts signāla rekonstrukcijai un signāla sintēzei:
 - realizējot elementāro rotāciju ar trigonometriskajām funkcijām un nolasot to vērtības no tabulas;
 - realizējot elementāro rotāciju ar CORDIC¹ algoritmu.

Savukārt bāzes funkcijām un signāla sintēzei papildus analizētas kļūdas, kas rodas:

- realizējot elementāro rotāciju ar trigonometriskajām funkcijām un aprēķinot tās ar LININT² algoritmu;
 - realizējot elementāro rotāciju ar trigonometriskajām funkcijām un aprēķinot tās ar CORDIC algoritmu.
- Analītiski analizētas fiksētā punkta aritmētikas operandu kvantēšanas izraisīto pārveidojumu kļūdas trigonometriskās funkcijas aprēķinu posmam, realizējot elementāro rotāciju ar trigonometriskajām funkcijām šādām darbībām:
 - signāla rekonstrukcijai ar CRAOT, CRAIMOT pārveidojumiem;

¹ *COordinate Rotation DIgital Computer* – Koordināšu rotācijas algoritms.

² *LINear INTerpolation* – Lineārā interpolācija.

- bāzes funkcijām ģenerējot tās ar CRAOT pārveidojumiem.
- Parādīts veids, kā var samazināt trigonometriskās funkcijas neprecizitātes dēļ ienesto kļūdu.

Aizstāvamās tēzes

1. Uz *GKP* balstīti BF sintēzes algoritmi RABOT, RA-HT un CRMOT pārveidojumiem.
2. Tiešie (uz *SCP* balstīti) BF sintēzes algoritmi RABOT un CRMOT pārveidojumiem.
3. Kļūdu novērtējumi reālām „leņķiskajām” ierīcēm ar fiksētā punkta aritmētiku.

Darba praktiskais pielietojums

Darbam ir arī praktisks pielietojums, realizējot eksperimentālas „leņķiskās” ierīces aparatūriski (piemēram, FPGA). Pašreiz izveidotās eksperimentālās FPGA ierīces varētu kalpot kā prototipi tuvākajā nākotnē veidojamajām ierīcēm, kuru darbības pamatā būs „leņķiskie” algoritmi. Tā, piemēram, šobrīd ir interesantas iestrādes „leņķisko” ortogonālo filtru jomā (G. Valters) un jaunu datu pārraides sistēmu izstrādē (D. Kļaviņš). Ierīču veidošana ir notikusi ciešā sadarbībā ar promociju darba autoru un to darbība balstās uz promocijas darbā iegūtajiem funkciju sintēzes algoritmiem. Īpaši ir jāatzīmē autora veiktie dažādu kļūdu aprēķini, kas ļauj korekti izvēlēties gan nolašu skaitu, gan operandu vārda garumus, jo FPGA resursu efektīva izmantošana ir saistīta ar fiksētā punkta aritmētiku (*fixed point arithmetic*). Aprēķinātās kļūdas ir noderīgas, lai novērtētu izveidotās ierīces izejas signāla ierobežotas precizitātes dēļ radītās kļūdas. Tas ļauj novērtēt atsevišķus posmus, kur rodas kļūdas un atvēlēt tam noteiktu vārda

garumu. Darbs dod konkrētas kļūdu novērtējumus un salīdzinājumus, piemēram CRAIMOT ģeneratoram, taču nepretendē uz visu jau izveidoto ierīču kļūdu (piemēram, dekompozīcijas-rekonstrukcijas filtriem) vērtējumu. Kļūdu aprēķinos iekrāto pieredzi (arī aprēķinu programmas, tās atbilstoši modificējot) viennozīmīgi varēs izmantot nākotnē veidojamo (un arī pašreiz funkcionējošo prototipu) ierīču precizitātes simulācijai un novērtēšanai.

Par nozīmīgāko promocijas darba praktisko pienesumu var uzskatīt izveidoto Matlab/Simulink līdzekļu kopu (*Toobox/Blockset*), kas ir funkciju, programmu un bloku bibliotēka (aptuveni 50 vienības). Šī līdzekļu kopa būtiski atvieglo gan teorētiskos pētījumus, gan ierīču aparatūrisku realizāciju izveidi.

Darba aprobācija

Darba publiskā prezentēšana zinātniskajās konferencēs:

- “RTU 46th International Scientific Conference”, 2005.gadā, 13.-15.oktobrī, Rīgā, Latvijā.
- “The 10th International Conference ELECTRONICS”, 2006.gadā, 23.-25. maijā, Kauņā, Lietuvā.
- “RTU 48th international scientific conference”, 2007.gadā, 11.-13. oktobrī, Rīgā, Latvijā.
- “Norchip-2007”, 2007. gadā, 19.-20. novembrī, Elborgā (Aalborg), Dānijā.
- “Norchip 2008”, 2008. gadā, 17.-18. novembrī, Tallinā, Igaunijā.

Promocijas darba galvenās tēzes tika publicētas

- P.Misans, M.Terauds. Errors of Constant Rotation Angle Fast Orthogonal Transforms Used for Fixed Point Arithmetic DSP

Applications: Preliminary Results// Elektronika ir Elektrotechnika, - Kaunas „Technologija“, 2005 - Nr.4 (60). - pp.17-22.

- M.Terauds. Kronecker Product Based Generation of RABOT Basis Functions// Scientific proceedings of Riga Technical University. Telecommunications and Electronics. - Rīga: „RTU”, 2006. – pp.:34-37.
- M.Terauds, G.Valters, U.Derums, N.Vasilevskis, P.Misans Comparison of Errors for Different Versions of FPGA-Based CRAIMOT Basis Function Generator//on flash - Norchip 2008.

Visas ar promociju darbu saistītas publikācijas

- P.Misans, M.Terauds. Errors of Constant Rotation Angle Fast Orthogonal Transforms Used for Fixed Point Arithmetic DSP Applications: Preliminary Results// Elektronika ir Elektrotechnika, - Kaunas „Technologija“, 2005 - Nr.4 (60) - pp.17-22.
- M.Terauds, Errors of Constant Rotation Angle Fast Orthogonal Transforms Used for Fixed Point Arithmetic DSP Applications: Optimal Angles// Scientific proceedings of Riga Technical University. Telecommunications and Electronics. - Rīga: „RTU”, 2005, pp.:12-15.
- P.Misans, M.Terauds. Introduction into the Fast Orthogonal Transforms Based on Rotation Angles: A New Methodical Approach Only or Gateway to Novel DSP Algorithms?// ECS'05 Conference Proc. - Bratislava, Slovakia, 2005 – pp. 85-94.
- M.Terauds. Kronecker Product Based Generation of RABOT Basis Functions// Scientific proceedings of Riga Technical University. Telecommunications and Electronics. - Rīga: „RTU”, 2006. – pp.:34-37.

- P. Misans, M. Terauds, G.Valters, U.Derums, N.Vasilevskis. FPGA-Based Craimot Basis Function Generator// Norchip, 2007 - pp.: 1-6.
- M.Terauds, G.Valters, U.Derums, N.Vasilevskis, P.Misans. Comparison of Errors for Different Versions of FPGA-Based CRAIMOT Basis Function Generator// Norchip - on flash, - 2008.
- P.Misans, M.Terauds, A.Aboltins, G.Valters. MATLAB/Simulink Implementation of Phi-Transforms – A New Toolbox Only or the Rival of Wavelet Toolbox for the Next Decade?// Nordic MATLAB User Conference Proceedings - 2008.
- P.Misans, G. Valters, M.Terauds, A.Aboltins. Initial Implementation of Generalized Haar-Like Orthonormal Transforms into FPGA-Based Devices - Part I: Signal Spectrum Analyser-Synthesizer Module// Telecommunications and Electronics – ser.7. vol. 8. – 2008 pp.: 16-21.
- P.Misans, G. Valters, M.Terauds, N.Vasilevskis. Initial Implementation of Generalized Haar-Like Orthonormal Transforms into FPGA-Based Devices - Part II: Parametrical Decomposition-Reconstuction Filters// Telecommunications and Electronics – ser.7. vol. 8.– 2008, pp.:22-26.

1. Zināmo ātro ortogonālo pārveidojumu apskats

1. nodaļas nosaukums ir „Zināmo ātro ortogonālo pārveidojumu apskats.” Nodaļa ir veltīta zināmo reālo diskrēto ātro ortogonālo pārveidojumu aprakstam, analīzei un klasifikācijai. Tiek apskatīti: Hāra, Volša Adamāra-Hāra, Slenta, Karunena-Loeva, Diskrētais Hartlī pārveidojumi, kā arī DCT, DST¹, LOT² un ortogonālie veivleti. Katram no pārveidojumiem tiek parādīti bāzes funkciju sintēzes algoritmi, transformācijas raksturīgākās īpašības un pielietojumi. Tiek piedāvāti iespējamie veidi, kā klasificēt pārveidojumus. Uzskaitītie pārveidojumi tiek klasificēti pēc:

- lineārā pārveidojuma veida,
- „kompleksitātes”,
- atkarības no ieejas signāla,
- simetriskuma,
- vērtībām, kuras var pieņemt bāzes funkcija,
- līdzkomponentes esamības,
- bāzes funkciju sakārtotības principa,
- BF sistēmas lokālas vai globālas jūtības,
- parametru esamības,
- BF multiplikatīvātes.

Tiek aplūkota vienotā pieeja zināmo pārveidojumu ģenerēšanai. Tā ļauj ar unificētiem sintēzes algoritmiem iegūt vairākus pārveidojumus. Viens no vienotas pieejas variantiem ir parametriskie pārveidojumi. Piemēram, Ahmed, Rao un Šulcs (Schultz) 1971.g. darbā ir aprakstīts vispārinātais

¹ *Discrete Sine Transform* - Diskrētais sinusa pārveidojums.

² *Lapped Orthogonal Transform* - Ortogonālie pārveidojumi ar pārklājumu.

diskrētais pārveidojums, kas, pie noteiktām parametru vērtībām, pārtop par: Adamāra pārveidojumu, komplekso BIFORE¹, diskrēto Furjē vai arī citiem pārveidojumiem. Cits vienotās pieejas variants ir izmantot unificētus sintēzes algoritmus. Piemēram, Fino un Algazi piedāvā unificētu sintēzes algoritmu BF rekursīvai ģenerēšanai ar vispārināto Kronekera reizinājumu, kas ļauj iegūt Hāra, Volša-Adamāra, Slenta-Adamāra, Slenta-Hāra pārveidojumus. Šī apskata rezultātā tiek atrastas tiešā Kronekera reizinājuma matricas, kas pie noteiktām parametru vērtībām pārtop par RABOT pārveidojuma (uz to tiek likts uzsvars šajā darbā) apakšklasēm: CRAOT un CRAIMOT, kuras pēc būtības 1973.g. jau ir aprakstījis Endrjū (*Andrews – Generalized class of Kronecker matrices*).

Nodaļa satur vairākas apakšnodaļas. Vienā no apakšnodaļām ir apskatīta signālapstrāde, izmantojot diskrēto signālu ģeometrisku interpretāciju, kuras pamata ir leņķi, ko veido signālvektori (t.sk. bāzes funkciju vektori) Eiklīda telpā. Ātros algoritmus ģeometriski var interpretēt kā plakņu vai vektora rotāciju šajā telpā. Rotācijas leņķi tiek uzskatīti par ātro algoritmu pamatu. Tiek apskatītas vairākas iespējamās rotācijas: Givensa rotācija, Jakobi rotācija, Faktorizētā rotācija, Ortonormālās μ -rotācijas, Ātri izpildāmā rotācija, Leņķiskais Furjē pārveidojums, uz rotācijām balstīts sistolisks procesoru masīvs. Rotācija ir arī instruments dažādos algoritmos, piemēram, QR dekompozīcijā, Singulāro vērtību dekompozīcijā, Īpašvērtību dekompozīcijā un veivletu parametrizācijā ar leņķisko pieeju.

Veidojot nodaļu, ir veikts relatīvi apjomīgs (98 atsauces) un detalizēts literatūras apskats, kura rezultātā ir konstatēts, ka:

- RABOT, CRMOT ir unikāli, līdz šim nepazīstami, pārveidojumi;

¹ *Binary FOurier REpresentation* - Binārais Furjē pārveidojums.

- CRAOT un CRAIMOT ir apakšklase no vispārināto Kronekera matricu klases vai atbilstoša RABOT apakšklase.
- Ir nepilnīgi pētītas CRAOT un CRAIMOT funkciju īpašības un pielietojumi.

2. RABOT pārveidojumi

2. nodaļas mērķis ir aprakstīt uz leņķiem bāzētus ortogonālus pārveidojumus. Nodaļas uzdevumi:

- definēt RABOT un to apakšklases,
- veikt RABOT pārveidojumu klasifikāciju,
- parādīt RABOT BF piemērus,
- definēt un aprakstīt svarīgākās RABOT BF īpašības.

RABOT pārveidojumu ģeometriskā jēga ir: savstarpēji neatkarīgu nolašu pāru veidotu vektoru elementāra rotācija par uzdoto leņķi. N – nolašu garam signālam tiek veiktas $N/2 \cdot \log_2 N$ neatkarīgas elementārās rotācijas.

Par RABOT pārveidojumu ir nosaukta $2^n \times 2^n$ $n \in \mathbf{N}$ matrica Φ_{2^n} , ko var iegūt ar šādu algoritmu:

$$\Phi_{2^n} = \underbrace{\mathbf{B}_n(\varphi) \cdot \dots \cdot \mathbf{B}_2(\varphi) \cdot \mathbf{B}_1(\varphi)}_{n_B}, \quad (2.1)$$

kur $\mathbf{B}_i(\varphi)$ – faktorizētā matrica, kas tiek definēta ar (2.2); φ -leņķu matrica (2.5); $n_B = n$.

$$\mathbf{B}_j(\varphi) = \begin{bmatrix} b_{0j}^{11} & b_{0j}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1j}^{11} & b_{1j}^{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2j}^{11} & b_{2j}^{12} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{\frac{N}{2}-1,j}^{11} & b_{\frac{N}{2}-1,j}^{12} \\ b_{0j}^{21} & b_{0j}^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1j}^{21} & b_{1j}^{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2j}^{21} & b_{2j}^{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{\frac{N}{2}-1,j}^{21} & b_{\frac{N}{2}-1,j}^{22} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

kur b^{km} - elementārās rotācijas matricas $\mathbf{T}_{i,j}$ (2.3) elements.

$$\mathbf{T}_{i,j} = \begin{bmatrix} b_{i,j}^{11} & b_{i,j}^{12} \\ b_{i,j}^{21} & b_{i,j}^{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Elementārās rotācijas matricas ir apkopotas nākamajā nodaļā. Klasisks elementārās matricas piemērs ir Givensa matrica (G_n)

$$\mathbf{T}_{i,j}^{G_+} = \begin{bmatrix} c_{i,j} & -s_{i,j} \\ s_{i,j} & c_{i,j} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

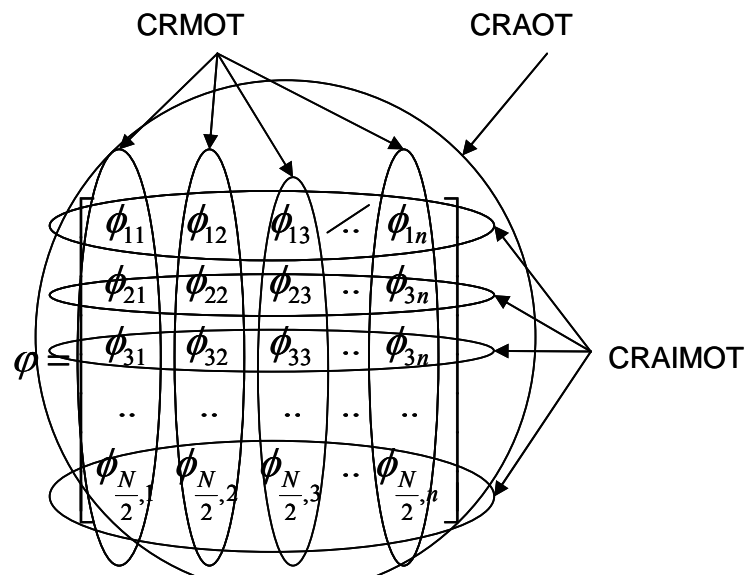
kur $c_{i,j} = \cos \phi_{i,j}$; $s_{i,j} = \sin \phi_{i,j}$; ϕ_{ij} - RABOT pārveidojumu specificējošs leņķis sk. (2.5).

RABOT pārveidojuma pamatā ir leņķu matrica, kas nosaka pārveidojuma apakšklases un tā īpašības:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{0,2} & \phi_{0,3} & \dots & \phi_{0,l} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \phi_{1,3} & \dots & \phi_{1,l} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \phi_{2,3} & \dots & \phi_{2,l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{\frac{N}{2}-1,1} & \phi_{\frac{N}{2}-1,2} & \phi_{\frac{N}{2}-1,3} & \dots & \phi_{\frac{N}{2}-1,l} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

kur $l = n$.

Atkarībā no leņķu savstarpējām sakarībām (mūsu gadījumā, kolonnu vai rindu vienādības) var izdalīt dažādas RABOT apakšklases: CRAOT, CRMOT, CRAIMOT – 2.1.att. Piemēram, CRAIMOT pārveidojumam ir vienādas visas (2.5) matricas rindas, bet CRAOT – pilnīgi visi leņķi.



2.1.att. Leņķu savstarpējā vienādība CRAOT, CRMOT, CRAIMOT pārveidojumos. Apvilktas identiskas leņķu grupas

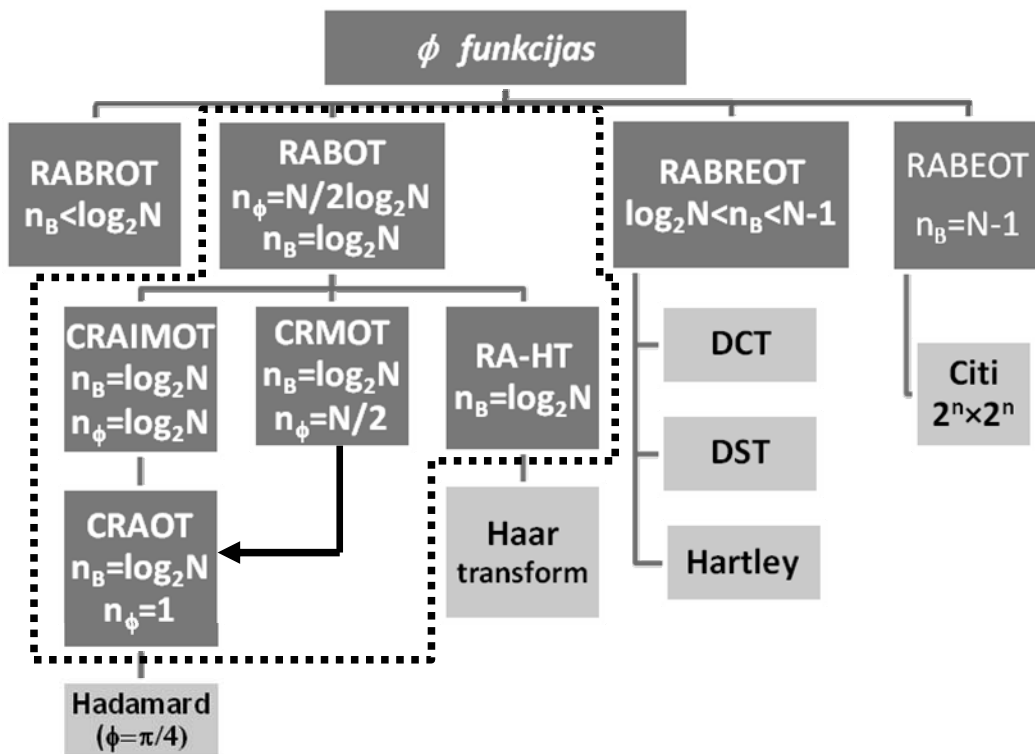
Tā, piemēram, CRMOT pārveidojumam pie $N = 8$ tiek izmantoti 4 dažādi leņķi:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_1 & \phi_1 \\ \phi_2 & \phi_2 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_3 & \phi_3 \\ \phi_4 & \phi_4 & \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Savukārt RA-HT pārveidojumam leņķu leņķu matricā ir aprakstāmi ar:

$$\phi_{rj} = \begin{cases} \phi_1, j = 1, & r \in [0, N/2 - 1] \\ \phi_1, j > 1, & r \in [0, N/2 - N/(2^j) - 1] \\ 0, j > 1, & r \in [N/2 - N/(2^j), N/2 - 1] \end{cases} \quad (2.7)$$

Nākamajā attēlā tiek parādīta leņķisko pārveidojumu klasifikācija.



2.2.att. RABOT pārveidojumu klasifikācija

n_B - B matricu skaits; n_ϕ - neatkarīgo leņķu skaits pārveidojumā; tumšie bloki – leņķiskie pārveidojumi; gaišie bloki – agrāk zināmie pārveidojumi.

Katrs zemākstāvošais pārveidojums ir speciāls gadījums no augstākstāvoša pārveidojuma. Tumšākajos blokos ir parādīti leņķisko pārveidojumu nosaukumi, bet gaišākajos – agrāk zināmie ortogonālie pārveidojumi. Ar punktēto līniju ir apvilkti tie pārveidojumi, kas tiek apskatīti šajā darbā. attēlā n_ϕ - dažādu leņķu skaits.

RABOT pārveidojuma BF \mathbf{f}_i tiek definētas kā pārveidojuma matricas rindas:

$$\Phi^{\{n\}} = [\mathbf{f}_0 \ \mathbf{f}_1 \ \dots \ \mathbf{f}_{N-1}]^T, \quad (2.8)$$

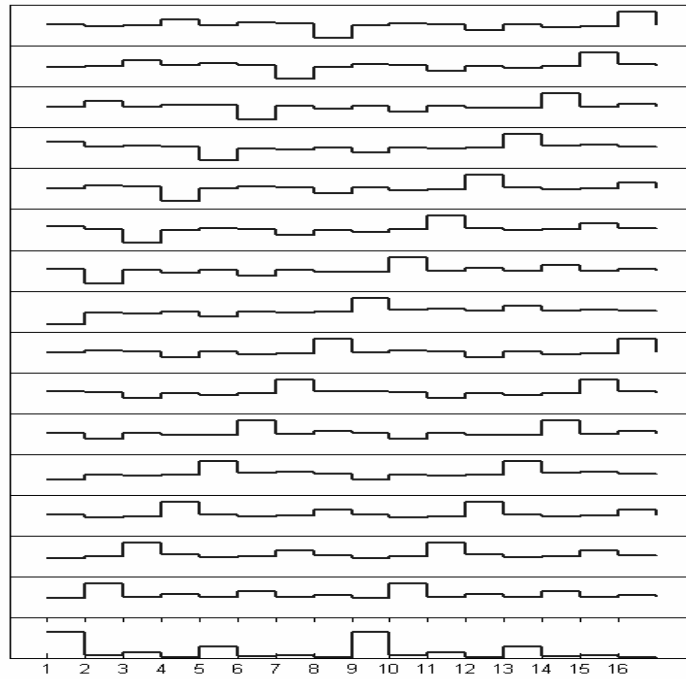
kur $\mathbf{f}_i - N$ nolašu gara bāzes funkcija; $n = \log_2 N$.

Tiek parādīti BF piemēri dažādām RABOT apakšklasēm 2.3.att.-2.6.att.

Ir apskatītas RABOT īpašības. Galvenās īpašības ir:

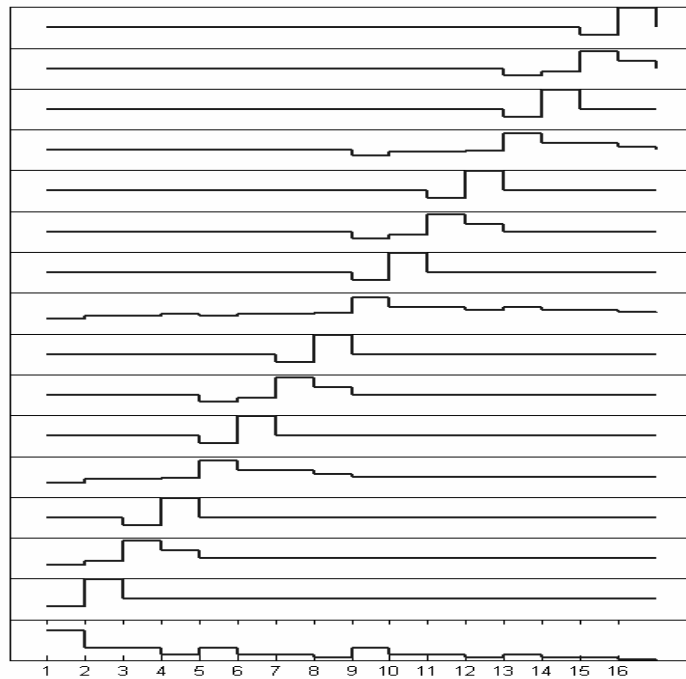
- RABOT pārveidojumi ir reāli. Pašlaik ir jau izstrādātas RABOT kompleksās versijas CRABOT¹ [5].
- RABOT pārveidojumi nav atkarīgi no ieejas signāla.
- RABOT, CRMOT pārveidojumi ir nesimetriski.
- CRAOT, CRAIMOT pārveidojumu matricas, kuriem pamatā ir R grupas elementārā rotācijas, ir simetriskas.
- RABOT BF vērtības vispārīgajā gadījumā ir iracionālas.
- RABOT BF vidējās vērtības vispārīgā gadījumā nav „0”. Tomēr, pie noteiktiem leņķu komplektiem, RABOT pāriet speciālā apakšklasē, kurai bāzes funkciju vidējā vērtība ir vienāda ar „0”.
- RABOT BF, vispārīgā gadījumā, piemīt t.s. naturālais sakārtojums (sakārtotību nosaka ģenerācijas algoritms).

¹ *Complex Rotation Angle Based Orthogonal Transform* - Kompleksie ortogonālie pārveidojumi, balstīti uz rotāciju leņķiem



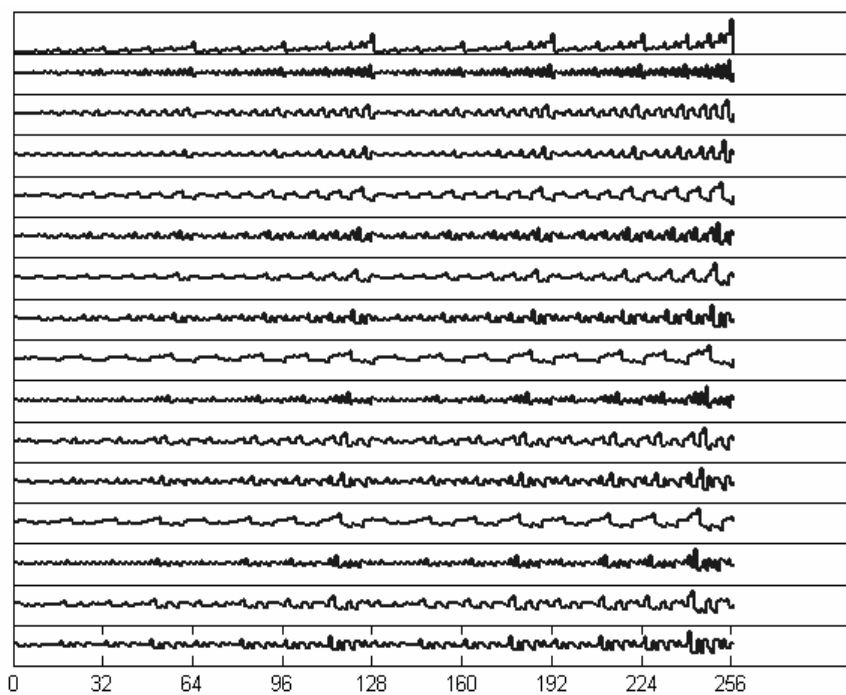
2.3.att.Bāzes funkcijas CRAINOT pārveidojumam

$\phi_1=45^\circ$; $\phi_{j+1}=\phi_j/2$; $N=16$.



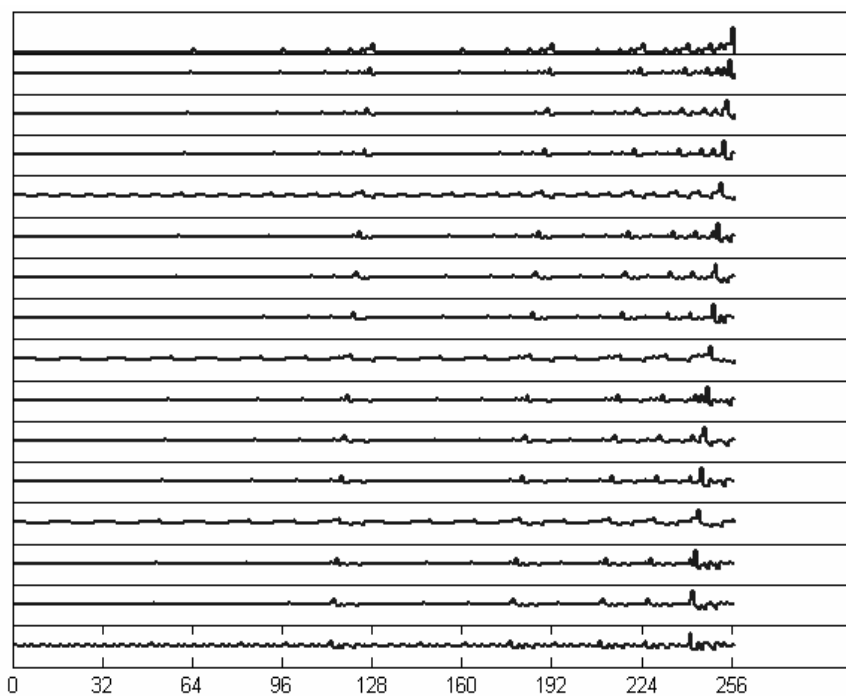
2.4.att.Bāzes funkcijas RA-HT pārveidojumam

$\phi_1=22.5^\circ$; $\phi_2=0$; $N=16$.



2.5.att. Pirmās 16 bāzes funkcijas CRAOT pārveidojumam

$$\phi = 30^\circ ; N=256.$$



2.6.att. Pirmās 16 bāzes funkcijas CRAIMOT pārveidojumam

$$\phi_j = 45^\circ ; \phi_{j+1} = \phi_j / 2 ; N=256.$$

- RABOT BF, vispārīgā gadījumā, lokālums nepiemīt (piemēram, veivletiem tāds piemīt). Tomēr var izdalīt speciālus gadījumus, kurām lokāluma īpašība ir spēkā, piemēram, RA-HT apakšklasei.
- RABOT pārveidojumi ir parametriski pārveidojumi, tiem ir uzdoti parametri – leņķi.
- RABOT funkcijām vispārīgā gadījumā multiplikatīvā īpašība nepiemīt, izņemot speciālus gadījumus. Tā, piemēram, ja visi leņķi ir 45° , funkcijas sakrīt ar Volša funkcijām.
- Jebkuru divu CRAIMOT BF vērtību moduļu kopas ir vienādas.

3. RABOT sintēzes metožu apkopojums, salīdzinājums

3. nodaļa ir veltīta RABOT pārveidojumu sintēzes metodēm. Ir apskatīta sintēze, izmantojot:

- Faktorizēto matricu reizinājumu (*FMP*),
- Vispārināto Kronekera reizinājumu (*GKP*),
- Sinusu un kosinusu pakāpju reizinājumu (*SCP*).

Ir apskatīta arī signāla analīze un sintēze RABOT bāzē ar ātrajiem algoritmiem (*FMP*). Minētie algoritmi tiek salīdzināti pēc operāciju skaita.

Tā kā RABOT pārveidojuma pamatā ir elementāras rotācijas, darbā tiek apkopotas šīs elementārās rotāciju matricas (3.1. tabula). Visas 16 rotācijas matricas var sadalīt divās pamatgrupās: *R* (**R**eflection) un *G* (**G**ivens) matricās. Katrā grupā ir 8 matricas un tās pāriet viena otrā pie noteiktām leņķa vērtībām. Gadījumos, kad leņķis mainās $0-45^{\circ}$ grādu robežās, ir jēga pielietot visas 8 matricas katrā grupā, bet gadījumos, kuros leņķis mainās no 0 līdz 360° , var runāt tikai par divām matricām (pirmā kolonna 3.1. tabulā).

Elementāro rotācijas matricu savstarpējās pārvērtības, leņķim mainoties
0-360° diapazonā

	ϕ	90- ϕ	90+ ϕ	180- ϕ	180+ ϕ	270- ϕ	270+ ϕ	- ϕ
G	$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s & -c \\ c & s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -s & -c \\ c & -s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -c & -s \\ s & -c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -c & s \\ -s & -c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -s & c \\ -c & -s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s & c \\ -c & s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$
R	$\begin{bmatrix} s & c \\ c & -s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & -s \\ -s & -c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s & -c \\ -c & -s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -s & -c \\ -c & s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -c & -s \\ -s & c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -c & s \\ s & c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -s & c \\ c & s \end{bmatrix}$

Sintēze ar *FMP* jau ir apskatīta pie pārveidojumu definīcijas.

Tālāk tiek aprakstīta BF sintēze ar *GKP*. CRAOT, CRAIMOT pārveidojumiem sintēze notiek ar parasto Kronekera reizinājumu (3.1) (CRAIMOT).

$$\Phi_{2^n}^{CRAIMOT} = \underbrace{\mathbf{T}_{0,n} \otimes \mathbf{T}_{0,n-1} \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_{0,j} \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_{0,1}}_n, \quad (3.1)$$

kur $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}(\phi)$ - CRAOT pārveidojumam; $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}(\phi_{ij})$ - CRAIMOT pārveidojumam; \otimes - nozīmē Kronekera reizinājumu.

CRAOT, CRAIMOT pārveidojumus var interpretēt arī kā vispārinātās Kronekera matricu (*Generalized Kronecker matrices*) klases apakšklases [1]. Minētās klases pārveidojumi ir CRAIMOT vispārinājumi (N var nebūt divnieku pakāpe), kuri tieši neietilpst pašreiz esošajā RABOT klasifikācijas shēmā.

RABOT CRMOT un RA-HT pārveidojumiem sintēze notiek ar vispārināto Kronekera reizinājumu (3.2), (3.3) un (3.4) attiecīgi.

$$\Phi_{(r)_2}^{\{m\}} = \left\{ \mathbf{T}'_{\underbrace{(0\dots 0r)}_{m-1}, m}, \mathbf{T}'_{\underbrace{(0\dots 1r)}_{m-1}, m}, \dots, \mathbf{T}'_{\underbrace{(1\dots 1r)}_{m-1}, m} \right\} \otimes \left\{ \Phi_{(r0)_2}^{\{m-1\}}, \Phi_{(r1)_2}^{\{m-1\}} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\Phi_{(r)_2}^{CRMOT\{m\}} = \left\{ \mathbf{T}'_{(\underbrace{0\dots 0}_m r)_2, 1}, \mathbf{T}'_{(\underbrace{0\dots 1}_m r)_2, 1}, \dots, \mathbf{T}'_{(\underbrace{1\dots 1}_m r)_2, 1} \right\} \otimes \left\{ \Phi_{(r0)_2}^{CRMOT\{m-1\}}, \Phi_{(r1)_2}^{CRMOT\{m-1\}} \right\}, \quad (3.3)$$

$$\Phi_{(r)_2}^{RA-HT\{m\}} = \left\{ \mathbf{T}'_{(\underbrace{0\dots 0}_m r)_2, m}, \mathbf{T}(0), \dots, \mathbf{T}(0) \right\} \otimes \left\{ \Phi_{(r0)_2}^{RA-HT\{m-1\}}, \Phi_{(r1)_2}^{RA-HT\{m-1\}} \right\}, \quad (3.4)$$

kur $\Phi_{(r)_2}^{\{1\}} = \mathbf{T}'_{(r)_2, 1}$; \mathbf{T}' atšķiras no \mathbf{T} ar pirmo indeksu reprezentāciju binārajā formā; $()_2$ nozīmē skaitļa bināro reprezentāciju; r – palīgindeks, binārajā formā (parādās starprēķinos); $r1, r00$ – nozīmē konkatenāciju starp r un 1 , un, r un 00 attiecīgi (tātad ja $r = 10$, tiek iegūts $101, 1000$ - attiecīgi); $\{ \} \otimes \{ \}$ - nozīmē Vispārināto Kronekera reizinājumu.

BF sintēze ar *SCP*, atšķirībā no iepriekšējiem diviem algoritmiem ļauj tieši aprēķināt jebkuru BF nolasi ($\Phi(i, k)$), nerēķinot visu BF komplektu. CRAOT, CRAIMOT gadījumos *SCP* pieeja noved pie šādas izteiksmes:

$$\Phi^{CRAIMOT}(i, k) = \prod_{j=0}^{n-1} (-1)^{a_j} s_{j+1}^{m_j(i, k)} c_{j+1}^{q_j(i, k)}, \quad (3.5)$$

kur $a_j, m_j, q_j \in \{0, 1\}$; $m_j + q_j = 1$; algoritmi to vērtību noteikšanai ir doti promocijas darbā; $i \in [0:N-1]$ – bāzes funkcijas indekss; $k \in [0:N-1]$ – bāzes funkcijas nolases indekss; $c_j = \cos(\phi_{0j})$; (CRAOT-am - $c_j = \cos(\phi)$); $s_j = \sin(\phi_{0j})$; (CRAOT-am - $s_j = \sin(\phi)$); $i_{(j)_2}, k_{(j)_2} - i,$

k indeksu, binārā pieraksta j -tie biti (vismazākās nozīmības bitam (LSB) atbilst 0).

RABOT, CRMOT BF sintēze notiek ar daudz sarežģītākām formulām (3.6) un (3.7):

$$\Phi(i, k) = \prod_{u=0}^{n-1} \left((-1)^{q_1(i,k,u)} \cdot c_{m,u+1}^{q_c(i,k,u)} \cdot s_{m,u+1}^{q_s(i,k,u)} \right), \quad (3.6)$$

$$\Phi^{CRMOT}(i, k) = \prod_{u=0}^{n-1} \left((-1)^{q_1(i,k,u)} \cdot c_m^{q_c(i,k,u)} \cdot s_m^{q_s(i,k,u)} \right), \quad (3.7)$$

kur m tiek noteikts ar (3.8); $q_1, q_c, q_s \in \{0,1\}$; $q_c + q_s = 1$; algoritmi to vērtību noteikšanai ir doti promocijas darbā; $c_{m,j} = \cos(\phi_{m,j})$; $s_{m,j} = \sin(\phi_{m,j})$.

$$m(i, k, u) = \prod_{j=1}^{n-1} i'_{(u-j)_2} + \prod_{r=1}^{n-i-1} k_{(n-r)_2}, \quad (3.8)$$

kur i' tiek noteikts ar (3.9); $i_{(u)_2}, k_{(u)_2}$ – i, k indeksu, bināra pieraksta u -tie biti $u = 0, 1, \dots, n-1$ (vismazākās nozīmības bitam atbilst 0); \prod – konkatenācija starp operandu binārajiem kodiem.

$$i'_{(u-j)_2} = \begin{cases} 0, & \text{ja } u-j < 0 \\ i_{(u-j)_2}, & u-j \geq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Apakšnodaļā 3.4 ir aprakstīti signāla analīzes un sintēzes algoritmi RABOT bāzē.

Sākumā ir doti labi zināmie tiešās sintēzes un analīzes algoritmi:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{X}; \quad \mathbf{X} = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{Y}; \quad (3.10)$$

kur \mathbf{X} – signāls; \mathbf{Y} – signāla spektrs; T – transponēšanas zīme.

Ja analīzē vai sintēzē izmanto ātro algoritmu (*FMP*), tad pārveidojuma matrica tiek faktorizēta (sadalīta speciālos reizinātājos). Signāla analīze RABOT pārveidojumam notiek ar formulu:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{B}_n(\varphi) \cdot \dots \cdot (\mathbf{B}_2(\varphi) \cdot (\mathbf{B}_1(\varphi) \cdot \mathbf{X})) \dots). \quad (3.11)$$

Līdzīgi tiek aprakstīti algoritmi arī CRAOT, CRMOT un CRAIMOT apakšklasēm.

Tālāk tiek aplūkota signāla sintēze ar ātrajiem algoritmiem. RABOT un to apakšklasēm sintēzes algoritms ir šāds:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{B}_2^T \cdot (\dots \cdot (\mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{Y}))))). \quad (3.12)$$

CRAOT un CRAIMOT gadījumos, sintēzes algoritms ir vienkāršāks, G grupas rotācijas matricām:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{B}_n(-\varphi) \cdot \dots \cdot (\mathbf{B}_2(-\varphi) \cdot (\mathbf{B}_1(-\varphi) \cdot \mathbf{Y})) \dots). \quad (3.13)$$

Savukārt, R grupas rotācijas matricām:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{B}_n(\varphi) \cdot \dots \cdot (\mathbf{B}_2(\varphi) \cdot (\mathbf{B}_1(\varphi) \cdot \mathbf{Y})) \dots). \quad (3.14)$$

Apakšnodaļā 3.5 visi iegūtie algoritmi salīdzināti savā starpā pēc operāciju skaita. Aprakstīti nosacījumi operāciju skaita atrašanai.

Sintezējot *BF* ar *GKP* vai ar *FMP*, ir nepieciešamas tikai reizināšanas operācijas, reizināšanas skaits CRAOT apakšklasei var noteikt ar (3.15), CRAIMOT apakšklasei ar (3.16), RABOT pārveidojumam ar (3.17).

$$M_N^{BF,GKP,CRAOT} = M_N^{BF,FMP,CRAOT} = \left(2 \sum_{j=2}^n j\right) - 1 = n \cdot (n+1) - 3, \quad (3.15)$$

kur M_N^{BF} - reizinājumu skaits, kas nepieciešams, lai sintezētu BF.

$$M_N^{BF,GKP,CRAIMOT} = M_N^{BF,FMP,CRAIMOT} = \sum_{j=2}^n 2^j = 4 \cdot (2^{n-1} - 1), \quad (3.16)$$

$$M_N^{BF,GKP,RABOT} = M_N^{BF,FMP,RABOT} = 4 \cdot 2^n \cdot (2^{n-1} - 1). \quad (3.17)$$

Piemēram, priekš $N = 256$: $M_{256}^{BF,GKP,CRAOT} = 69$, $M_N^{BF,GKP,CRAIMOT} = 508$,

$$M_N^{BF,GKP,RABOT} = 130048.$$

Sintezējot *BF* komplektu ar *SCP*, gadījumā, kad netiek ņemtas vērā vienādās operācijas (to apzīmēsim ar SCP_1) var sarēķināt, ka nepieciešamais reizinājumu skaits būs

$$M_N^{BF,SCP_1} = N^2(n-1). \quad (3.18)$$

Savukārt, ja ņem vērā vienādās operācijas (to apzīmēsim ar SCP_2), tad operāciju skaits CRAOT pārveidojumam samazināsies līdz:

$$M_N^{BF,SCP_2,CRAOT} = (n+1)(n-1), \quad (3.19)$$

atceroties, ka daļa reizinājumu rezultātu ir jāglabā atmiņā.

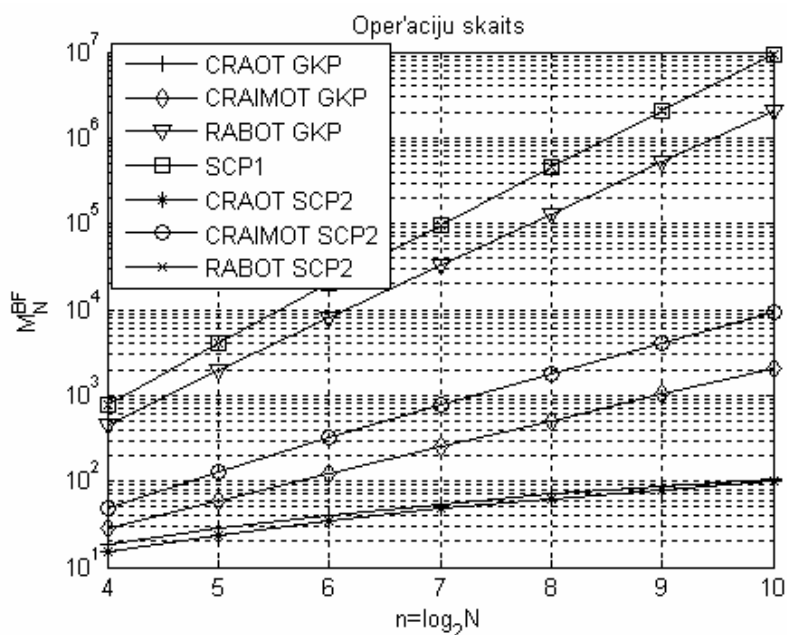
CRAIMOT pārveidojumam operāciju skaits atbilstoši samazināsies līdz:

$$M_N^{BF,SCP_2,CRAIMOT} = 2^n(n-1). \quad (3.20)$$

Piemēram, priekš $N = 256$: $M_N^{BF,SCP_1} = 458752$, $M_N^{BF,SCP_2,CRAOT} = 63$,

$M_N^{BF,SCP_2,CRAIMOT} = 1792$.

Visas minētās metodes tiek salīdzinātas savā starpā 3.1.att.



3.1.att. BF komplekta ģenerēšanai nepieciešamais operāciju skaits

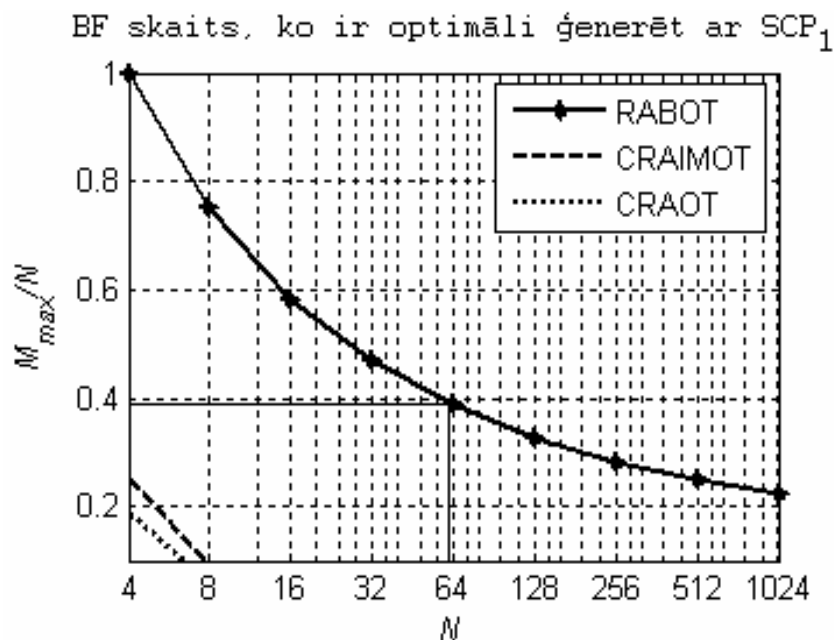
SCP_1 pieeja ir izdevīgākā operāciju skaita ziņā, ja ir jāģenerē tikai dažas no BF komplekta. Šo BF funkciju skaitu pārveidojumiem ilustrē

3.2.att. un RABOT pārveidojumam to var aptuveni (ar 10% kļūdu) aprakstīt ar izteiksmi:

$$M_{\max} \approx \text{round}(1.3 * N^{0.73}), \quad (3.21)$$

kur M_{\max} – bāzes funkciju skaits, kura ģenerācija operāciju skaita ziņā ar SCP_1 ir izdevīgākā, nekā pilna komplekta ģenerēšana ar GKP vai FMP .

Tā, piemēram, ja pie $N = 64$ komponentu skaits nepārsniedz $M_{\max} \approx 0.4 \cdot 64 \approx 26$ ātrā algoritma izmantošana RABOT pārveidojumu matricas ģenerēšanā (FMP , GKP) operāciju skaitā zaudē.



3.2.att. M_{\max}/N attiecībā no N

Tiek apskatīts operāciju skaits, kas nepieciešams, lai veiktu signāla analīzi vai sintēzi. Tiešai spektra rēķināšanai (TR), izmantojot jau sarēķinātas bāzes funkcijas ir nepieciešams

$$M_N^{Y,TR} = N^2 \quad (3.22)$$

reizinājumu un

$$A_N^{Y,TR} = N(N-1) \quad (3.23)$$

summēšanu.

Kur M_N^Y - nepieciešamais reizinājumu skaits, lai sintezētu signālu vai sarēķinātu spektru; A_N^Y - nepieciešamais summēšanu skaits, lai sintezētu signālu vai sarēķinātu spektru.

Rēķinot spektru ar ātro algoritmu, nepieciešamo operāciju skaits strauji samazinās un nepieciešamo summēšanu skaits ir

$$A_N^{Y,FMP} = N \cdot n, \quad (3.24)$$

bet nepieciešamo reizinājumu skaits:

$$M_N^{Y,FMP} = 2 \cdot N \cdot n. \quad (3.25)$$

Ir jāņem vērā, ka „ātrā” pieeja ir vēl izdevīgāka, jo nav nepieciešams rēķināt BF.

4. RABOT pārveidojuma kvantēšanas kļūdu analīze

4. nodaļa ir veltīta kvantēšanas kļūdu analīzei. Nodaļas sākumā tiek aplūkotas dažādas vienkāršākās iespējamās signāla pārveidošanas shēmas:

- signāla sintēzei,

- signāla analīzei,
- signāla rekonstrukcijai (pilnam pārveidojumam).

Visām shēmām tiek skatīta izejas signāla kļūda. Tiek aplūkota arī bāzes funkcijas sintēzes kļūda, un parciālās summas kļūda (t.i. kļūda, ja signāls tiek sintezēts no spektra, kas satur relatīvi lielu nulles komponentu skaitu).

Pēc aprakstītajām signāla pārveidošanas shēmām tiek iegūts N – nolašu garš izejas signāls un attiecīgi var iegūt N – nolašu garu kļūdu vektoru.

$$\Delta_v = \hat{v} - v, \quad (4.1)$$

kur v – izejas signāls; \hat{v} - kļūdainais izejas signāls; Δ_v - kļūdu vektors.

Iegūtais N – nolašu garš kļūdu vektors tiek normēts pēc izejas signāla jaudas:

$$\Delta_{vP} = \frac{\Delta_v}{P_v} = \frac{\Delta_v}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j^2}}, \quad (4.2)$$

kur N – nolašu skaits, izejas signāla vektorā; v_j - izejas signāla nolase; P_v - izejas signāla jauda.

Lai apstrādātu N -nolašu garu kļūdu vektoru, ir aprēķināta vidējā kvadrātiskā kļūda. Kā kļūdas mērs ir izmantota kvadrātsakne no vidējās kvadrātiskās kļūdas.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta_{vPj})^2}. \quad (4.3)$$

Lai pārietu pie pašiem kļūdu izraisītājiem, ir jāapskata RABOT pārveidojuma aparatūriskās realizācijas. RABOT aparatūriskās realizācijas, kas ir apskatītas šajā darbā, atšķiras savā starpā ar nolašu rotācijas procesa realizāciju:

- Elementārās rotācijas rēķināšana pēc formulas (2.3) notiek,
 - nolasot *sin* un *cos* vērtības no trigonometrisko funkciju tabulas;
 - aprēķinot *sin* un *cos* vērtības ar lineārās interpolācijas algoritmu;
 - aprēķinot *sin* un *cos* vērtības ar CORDIC algoritmu;
- Elementārās rotācijas tiešā rēķināšana ar CORDIC algoritmu.

Katrai realizācijai ir raksturīgas savas kvantēšanas kļūdas. Rēķinot elementāro rotāciju pēc formulas (2.3), bet trigonometrisko funkciju nolasot no tabulas atmiņā, ir izdalīti sekojošie kļūdu posmi, un tām atbilstošas kļūdas:

- Aprēķinu posms - aprēķinu kļūdas;
- Trigonometrisko funkciju formēšanas posms - trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās kļūdas;
- Leņķa formēšanas posms - leņķa kvantēšanas izraisītās kļūdas.

Aprēķinu kļūdas ir saistītas ar aprēķinu ierobežoto precizitāti mainīgo ierobežotā vārda garuma dēļ. Ierobežotā precizitāte tiek nomodelēta ar kvantēšanas palīdzību. Mainīgo glabāšanai tiek pielietots fiksētā punkta Q1.x formāts. Izmantotā kvantēšana ir ar „fix” noapaļošanu (skaitļa noapaļošana, atmetot daļveida daļu), jo tā tiek pielietota FPGA. Pēdējās divas kļūdas ir saistītas ar ierobežoto atmiņas daudzumu, kas ir izdalīta trigonometrisko funkciju tabulas glabāšanai. Trigonometrisko funkciju

vērtību glabāšanas precizitāte tiek imitēta ar kvantēšanu, izmantojot „round” (uz vistuvāko pieļaujamo vērtību) noapaļošanu.

Realizācijās, kurās trigonometriskā funkcija tiek aprēķināta ar lineāras interpolācijas algoritmiem un ar CORDIC algoritmiem, var izdalīt sekojošus kļūdu posmus un tam atbilstošas aparatūriskās kļūdas:

- Aprēķinu posms – Aprēķinu kļūdas;
- Trigonometriskās funkcijas formēšanas posms - trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītas kļūdas.

Aprēķinu kļūdas sakrīt ar iepriekš aprakstītās realizācijas aprēķinu kļūdām. Trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītas kļūdas ir saistītas ar LININT un CORDIC algoritmu izraisīto kļūdu, rēķinot trigonometrisko funkciju.

Kā jau minēts, elementāro rotāciju var veikt arī uzreiz, to realizējot ar CORDIC algoritmu. Šajā procesā var izdalīt:

- Leņķa neprecizitātes izraisītas kļūdas, ko rada leņķa formēšanas posms;
- RABOT pirmsrotāciju/pēcrotāciju kvantēšanas izraisītas kļūdas, ko izraisa pirmsrotācijas un pēcrotācijas signāla kvantēšana;
- Rotāciju aprēķinu kļūdas, kas rodas rotāciju realizācijas procesā (posmā).

Rotāciju aprēķinu kļūdas un pirmsrotācijas/pēcrotācijas signāla kvantēšanas dēļ izraisītas kļūdas ir saistītas ar mainīgo lielumu kvantēšanu, bet leņķa neprecizitātes izraisītas kļūdas ir saistītas ar iterāciju skaitu (tas ir vienāds ar vārda garumu), piemeklējot attiecīgo leņķi.

Apakšnodaļā „Analītiskā pieeja kļūdu rēķināšanai” ir mēģināts ar simboliskajiem aprēķiniem iegūt minēto aparatūrisko kļūdu analītiskās izteiksmes augstāk pieminētajām signāla pārveidojuma shēmām, atkarībā no

nolašu skaita, leņķa un vārda garuma. Izteiksmes izdevās iegūt signāla rekonstrukcijas shēmai (tikai CRAOT un CRAIMOT apakšklasēm) un bāzes funkcijām (tikai CRAOT apakšklasei) priekš trigonometriskās funkcijas neprecizitāšu izraisītās kļūdas aprēķina. Tika izdarīti arī svarīgi secinājumi:

- Trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītā vidējā kvadrātiskā kļūda CRAOT un CRAIMOT apakšklasēm ir vienāda visām bāzes funkcijām pārveidojuma matricā.
- Trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītā vidējā kvadrātiskā kļūda CRAOT un CRAIMOT apakšklasēm signāla rekonstrukcijas shēmai nav atkarīga no ieejas nolašu komplekta (ieejas signāla).

Tā kā analītiski visas aparatūriskās kļūdas aprakstīt neizdevās, tās ir jāanalizē ar skaitliskajiem paņēmieniem, tāpēc seko apakšnodaļa „Skaitliskā kļūdu analīze”. Apakšnodaļas sākumā tiek analizēts, kā pareizi jāorganizē skaitliskos eksperimentus.

Tiek secināts, ka ģenerējot ieejas signāla nolases un pārveidojuma leņķu komplektus, lai visas iespējamās kombinācijas parādītos ar vienādu varbūtību:

- ieejas signāla nolasi ir jāģenerē ar normāla sadalījuma gadījuma skaitļu ģeneratoru,
- katru leņķi ir jāģenerē ar vienmērīga sadalījuma gadījumu skaitļu ģeneratoru.

Tiek apskatīts arī modelēšanas apjoma jautājums. Ir aplūkoti dažādi algoritmi, ar kuriem tiek novērtēts pārveidojuma kļūdas maksimums pa rotācijas leņķiem. Bez tam ir salīdzināts arī modelēšanas apjoms dažādām RABOT apakšklasēm. Piemēram, pie $N = 512$, modelējot RABOT pārveidojumu, ir jāveic 2000 reižu vairāk eksperimentu, nekā modelējot

CRAOT. Diemžēl, lai nodrošinātu šādu pieeju, praktiski pietrūkst rēķināšanas resursu, tāpēc visām RABOT apakšklasēm tiek izmantots vienāds eksperimentu skaits.

Nākamais izklāstītais jautājums ir kļūdu attēlošana. RABOT pārveidojumiem kļūda ir atkarīga no nolašu skaita N , vārda garuma (WL^1), rotācijas leņķu un ieejas nolašu komplektiem. Kļūdas atkarība no katra leņķa leņķu komplektā ir grūti aprakstāma, jo tai ir oscilējošs raksturs (līdzīgi, kā tas ir redzams 4.3.att.), tāpēc tā ir aizvietota ar kļūdas maksimumu, minimumu un vidējo vērtību pa leņķiem, katram leņķim neatkarīgi mainoties $0-45^0$ robežās. Kļūdas atkarību no ieejas nolašu komplekta aprakstīsim līdzīgi – izdalīsim maksimumu, minimumu un vidējo vērtību pa nolašu komplektiem (nol). Ieejas nolašu un leņķu komplektus mainīsim vienlaicīgi, tāpēc varam izdalīt: maksimumus, minimumus un vidējās vērtības pa leņķi, un nolasēm:

$$\varepsilon^{\max, \phi, nol} = \max_{\phi=0:45} \max_{nol} \varepsilon, \quad \varepsilon^{\min, \phi, nol} = \min_{\phi=0:45} \min_{nol} \varepsilon, \quad \varepsilon^{\text{mean}, \phi, nol} = \text{mean}_{\phi=0:45} \text{mean}_{nol} \varepsilon, \quad (4.4)$$

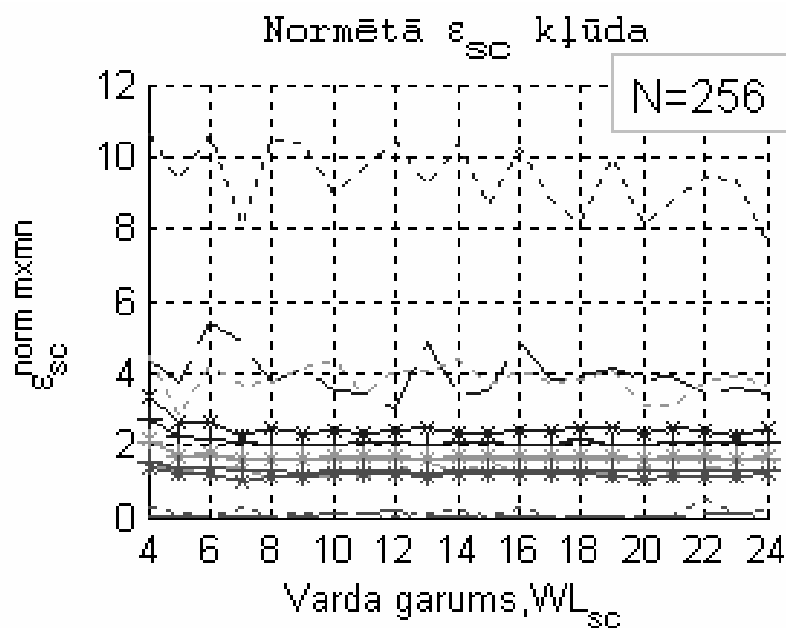
kuras turpmāk tekstā tiek apzīmētas attiecīgi ar: $\varepsilon^{\max, \phi, nol}$, $\varepsilon^{\min, \phi, nol}$ un $\varepsilon^{\text{mean}, \phi, nol}$, bet kā kopīgs apzīmētājs visu triju kļūdu apzīmēšanai tiek izmantots $\varepsilon^{\text{mxmn}}$.

Maksimumam $\varepsilon^{\max, \phi, nol}$ ir praktiska nozīme, savukārt, minimums $\varepsilon^{\min, \phi, nol}$ kopā ar maksimumu $\varepsilon^{\max, \phi, nol}$ ļauj spriest par kļūdu oscilāciju amplitūdu, vidējā vērtība $\varepsilon^{\text{mean}, \phi, nol}$ tiek pielietota, ja kļūdu ir nepieciešams izmantot kā parametru, piemēram, salīdzināšanai.

¹ *WordLength* - vārda garums

Minētas ε^{mxmn} kļūdas aprakstītajām signāla pārveidošanas shēmām tiek analizētas ar skaitliskajām metodēm. Atkarībā no nolašu skaita un vārda garuma, ε^{mxmn} kļūdu izmaiņas ir monotonas. Kļūdas ir normētas pret kvantēšanas soli, jo tad lielākā daļa no tām tad kļūst neatkarīgas no vārda garuma WL . Tās tiek sauktas par normētajām kļūdām.

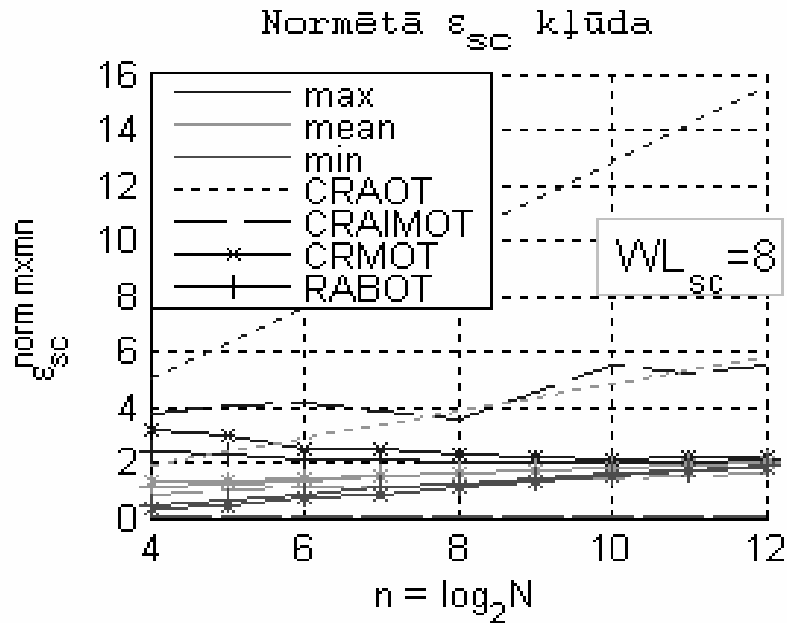
Iegūtie rezultāti tiek attēloti grafiku veidā. Tā, piemēram, 4.1.att. ir parādītas normētas trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās kļūdas ε_{sc}^{mxmn} signāla rekonstrukcijai, pārveidojuma realizācijai, kad elementārās rotācijas aprēķināšana notiek pēc formulas (2.3) bet trigonometrisko funkciju (\sin , \cos) vērtības glabājas trigonometrisko funkciju tabulā.



4.1.att. Normētās trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās kļūdas

$$\varepsilon_{sc}^{mxmn, norm} = f(WL_{sc})_{N=256}^1,$$

¹ Promocijas darbā tiek pielietoti papildus indeksi, kas specificē nolašu rotācijas realizāciju, un pārveidošanas shēmu. Šeit un tālāk, šie indeksi izlaisti labākai apzīmējumu uzskatāmībai.



4.2.att. Normētās trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās kļūdas

$$\varepsilon_{sc}^{mxmn, norm} = f(n) \Big|_{WVL_{sc}=8}; mxmn = \max, \min, \text{mean}.$$

Ar daudzkārtīgās regresijas (*multiple regression*) palīdzību tika piemeklētas tuvinātas izteiksmes, norādot precizitāti. Piemēram, kļūdai, kas ir attēlota 4.1.att. un 4.2.att.:

$$\tilde{\varepsilon}_{sc}^{\max \phi, nol} / q = 0.004 + 1.14n, \quad (\gamma^{\max} = 0.16, \gamma^{MSE} = 0.08), \quad (4.5)$$

kur ε_{sc} - trigonometriskās funkcijas neprecizitātes izraisītā kļūda; q - kvantēšanas solis; γ^{\max} , γ^{MSE} - kļūdas, kas raksturo sakarības precizitāti, attiecīgi, maksimālā un kvadrātsakne no vidējās kvadrātiskās pielaikošanas kļūdas.

Katram kļūdu izraisošajam posmam ir savs pienesums summārajā kļūdā. Simulācijas eksperimentos tika konstatēts, ka summārās kļūdas aprēķinos var izmantot „daļējās superpozīcijas” principu. Tā, piemēram, ja

ir nepieciešams aprēķināt kļūdu, ko ir izraisījuši trigonometriskās funkcijas formēšanas posms un aprēķinu posms, tad signāla rekonstrukcijas gadījumā, pieļaujot 10% kļūdu, ir spēkā šāda izteiksme:

$$\varepsilon_{sc+calc}^{mean\phi,nol} \approx 0.75 \cdot (\varepsilon_{sc}^{mean\phi,nol} + \varepsilon_{calc}^{mean\phi,nol}), \quad (4.6)$$

kur ε_{calc} - aprēķinu posma ienestā kļūda.

Katrs atsevišķais saskaitāmais tiek iegūts, ņemot vērā tikai atbilstošā posma pienesumu, bet ignorējot pārējo posmu izraisītās kļūdas. Līdzīgs rezultāts ir labi zināms no statistikas (divu neatkarīgu gadījuma signālu summas enerģija).

Korekcijas koeficients (izteiksmē pirms summas) ir vismazākais, kad posmu kļūdas ir praktiski vienādas. Pamatojoties uz to, tika izdarīti secinājumi par katra posma izdalāmo vārda garumu. Posmiem atvēlētais savstarpējais vārda garums ir atkarīgs no nolašu skaita.

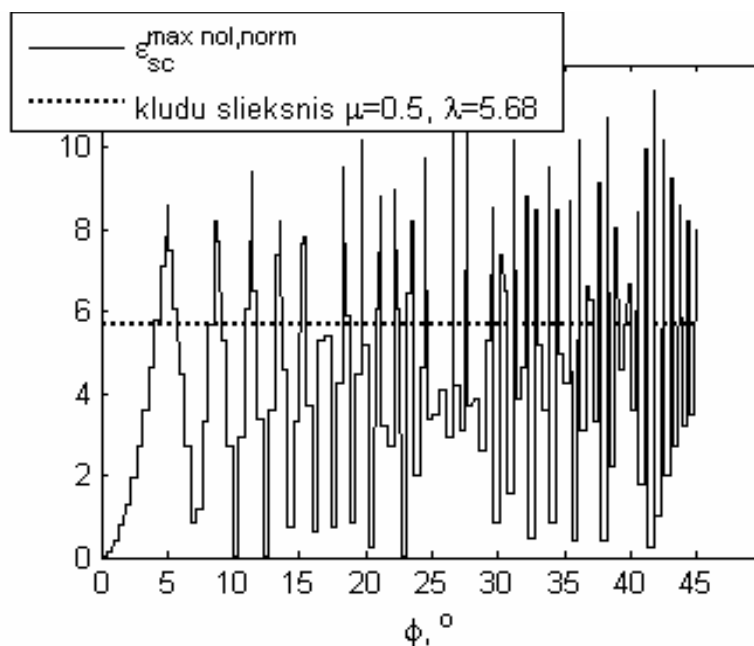
Skaitliski ir nomodelēta kļūda signāla rekonstrukcijas shēmai un signāla sintēzes shēmai. Ir novērtēta normētā ε^{mxmn} atkarībā no vārda garuma un nolašu skaita katram kļūdu posmam. Ir izdarīti secinājumi par to, kādu savstarpējo vārda garumu ir jāatvēl tam vai citam kļūdu izraisošajam posmam. Ir konstatēts, ka aprēķinu kļūdai ir novērojama piesātināšanās – pie nepietiekama vārda garuma kļūda kļūst vienāda ar „1”. Realizējot elementāro rotāciju ar CORDIC algoritmu, ņemot vērā literatūrā [3], [4] norādītos vārda garumus attiecīgajiem kļūdu posmiem ir secināts, ka dominējošā ir pirmsrotācijas un pēcrotācijas signāla kvantēšanas kļūda.

Visām minētajām aparatūriskajām kļūdām skaitliskie rezultāti tiek iegūti pilna pārveidojuma shēmai un signāla sintēzes shēmai, realizējot RABOT attiecīgi ar:

- trigonometrisko funkciju tabulu,
- CORDIC izpildīto rotāciju.

Bāzes funkcijas kļūdas un parciālās summas (sintezējot signālu) kļūdas shēmas tiek skatītas tikai RABOT aparatūriskajai realizācijai, rēķinot trigonometriskās funkcijas ar LININT un CORDIC algoritmiem. Šiem algoritmiem tiek ņemta vērā tikai trigonometriskās funkcijas formēšanas neprecizitāte.

Mainoties rotācijas leņķiem, trigonometriskās funkcijas neprecizitātes izraisītajai kļūdai ir novērojamas straujas oscilācijas.



4.3.att. Normētās trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās kļūdas.

Kļūdu sliekšnis. Rezultāti ir iegūti CRAOT pārveidojumam

$$\epsilon_{sc}^{\max \text{ nol, norm}} = f(\phi)_{WL=8, N=256}.$$

Ja attiecina kļūdas maksimumu pret kļūdas minimumu, tad var konstatēt, ka attiecība var sasniegt pat 600 reizes (CRAOT pārveidojumam). Lai samazinātu kļūdu, ir iespējams īstenot sekojošu „metodisku” pasākumu:

Ierobežot pieejamo leņķu skaitu, tādējādi, ka leņķi, pie kuriem kļūda sasniedz aizliegtu robežu, tiek nosaukti par aizliegtajiem leņķiem un tie netiek izmantoti. Pārējie leņķi tiek uzskatīti par optimālajiem leņķiem. Līdz ar izmantojamā leņķu komplekta ierobežojumiem tiek samazināta kļūda.

Optimālo leņķu kļūdu samazināšanas metodikas lietderīgums ir atkarīgs no dažādiem aspektiem. No vienas puses, optimālo kļūdu ieviešana uzlabo kopējo kļūdu, no otras puses, - tā samazina pieejamo leņķu skaitu un palielina spraugas ar aizliegtajiem leņķiem. Tāpēc, par optimālo leņķu pieejas lietderīgumu var spriest tikai konkrētā pielietojuma kontekstā.

5. RABOT pārveidojumu praktiskā realizācija

Šī nodaļa ir veltīta konspektīvam promocijas darbā aplūkojamo pārveidojumu praktiskajai realizācijai. Izstrādātais darbs ir pirmais promociju darbs, kas ir saistīts ar, iespējams, jaunu signālu apstrādes virzienu. Šajā virzienā RTU Elektronikas un Telekomunikāciju fakultātē jau dažus gadus strādā t.s. " ϕ -funkciju grupa", kas nodarbojas ar darbā apskatīto jauno funkciju teoriju un to pielietojumiem. Liela daļa darba teorētisko ideju ir iemiesotas MATLAB vidē izveidotajās virtuālajās ierīcēs un programmās. Daļa no šīs grupas izstrādā reālu ierīču prototipus (uz FPGA bāzes). Tiek veidoti ϕ -funkciju ģeneratori, spektra analizatori, ϕ -filtri un sakaru ierīces.

Darba autors pats it tieši piedalījies sekojošu virtuālo ierīču (programmu) izveidē:

- 1D bāzes funkciju ģenerators,
- runas signālu analizators-sintezators,

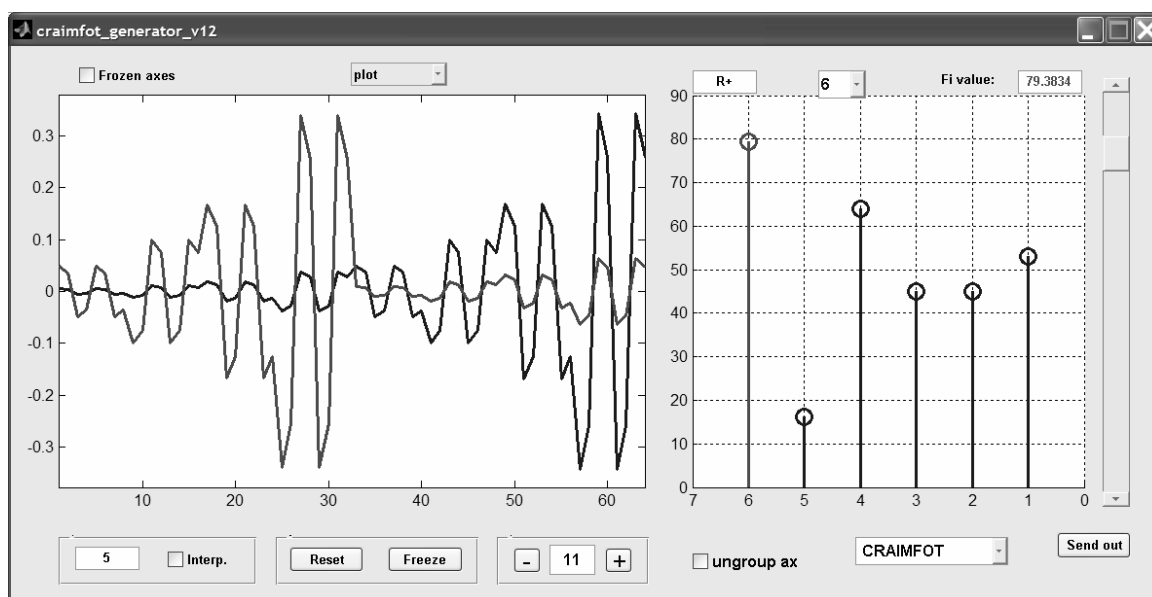
- ϕ - funkciju līdzekļu kopa (Toolbox/Blockset) bibliotēka

Lielu promociju darba daļu aizņem kļūdu simulācijas eksperimenti un kļūdu lielumu novērtējumi, atkarībā no fizisko ierīču parametriem (piemēram, vārda garuma). Aparatūrisko kļūdu novērtējumi ir izmantoti, veidojot

- dažādas CRAIMOT BF ģeneratoru FPGA realizācijas versijas,
- RA-HT analizatora-sintezatora moduļa FPGA realizācija,
- RA-HT dekompozīcijas rekonstrukcijas filtru FPGA realizācija

Šī darbā ietvaros, ierobežotā laika un apjoma dēļ, pašam autoram nebija iespējas tieši nodarboties ar reālu FPGA ierīču izstrādi. Tomēr tika ieguldīts darbs: analizēta literatūra, veikta mutiskā komunikācija ar „komandas” locekļiem, reālo ierīču izstrādātājiem, lai veiktie skaitliskie eksperimenti pēc iespējas vairāk atbilstu praktiski izmantojamajiem rezultātiem.

Detalizētāku informāciju par apskatāmo pārveidojumu praktisko realizāciju var atrast publicētajos rakstos un nodaļas tekstā. Šeit aprobežosimies tikai ar vienu piemēru – virtuālo 1D bāzes funkciju ģeneratoru. Šī virtuālā ierīce ir izveidota, lai gūtu priekšstatu par RABOT, CRMOT, CRAIMOT un CRAOT funkciju formu daudzveidību. Ierīce ļauj ģenerēt arī tādas labi zināmas funkcijas kā Adamāra un Hāra funkcijas. Ģenerators ir paredzēts FPGA ģeneratoru sintezēto bāzes funkciju formu pārbaudei, tam ir interfeiss ar citām programmām. Programma ir izveidota kā ērts demonstrācijas instruments. Virtuālās ierīces grafiskā interfeisa galveno logu var redzēt nākamajā attēlā.



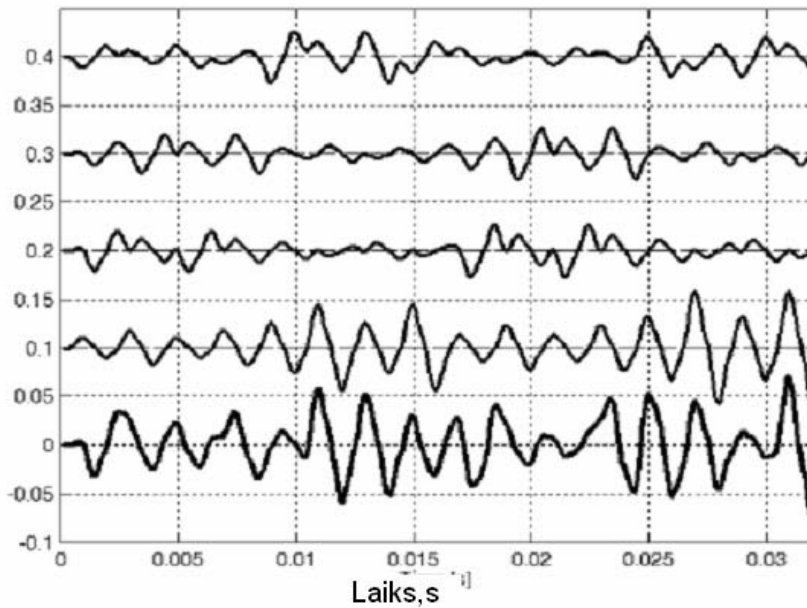
5.1.att. 1-D ϕ -funkciju ģeneratora interaktīvais logs. Iesaldēšanas režīms

Nozīmīgākais autora praktiskais piensums ir MatLab/Simulink līdzekļu kopa (Toolbox/Blockset) izstrādē. Līdzekļu kopa satur t.s. primitīvus, virtuālos instrumentus utt. – kopumā aptuveni 50 vienības (funkcijas, programmas un Simulink blokus). Līdzekļu kopa ir aprakstīta [5] un pēc dokumentēšanas pabeigšanas būs izmantojama kā brīvpieejas bibliotēka.

ϕ funkciju praktiskā nozīmība

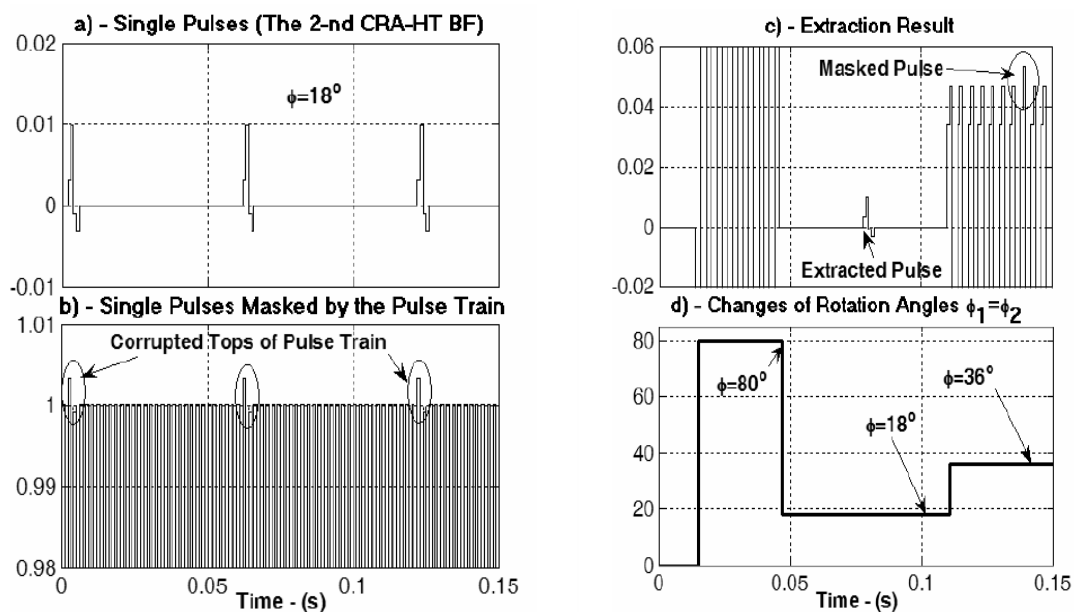
" ϕ funkciju grupa" ir veikusi dažādus eksperimentus, attiecībā uz RABOT pārveidojumiem. Dažu eksperimentu rezultāti ir publicēti. Piemēram, [11] ir nodemonstrēts, ka CRAIMOT funkcijas varētu būt ļoti noderīgas runas analīzei, sintēzei un kompresijai. Runai iespējamā sasniedzama kompresijas pakāpe ir vismaz 2-3 reizes augstāka nekā izmantojot, piemēram, veivletus. Tipisks piemērs ir redzams 5.2.att.

Publikācijā [6] ir aprakstīti parametriskie dekompozīcijas-rekonstrukcijas filtri (Parametrical decomposition-reconstruction filters), un



5.2.att. Latviešu valodas „a” patskaņa (apakšējs signāls) sintēze ar 4-rām CRAIMOT bāzes funkcijām (4 augšējie signāli). (Parādītas funkciju interpolētās versijas).

Attēls aizgūts no [11] publikācijas



5.3.att. Impulsveidīga signāla, sajaukta ar meandru izfiltrēšana ar leņķiskajiem filtriem.

a) derīgais signāls (impulsveida signāls); b) derīgs signāls sajaukts ar meandru; c) filtrēšanas rezultāti; d) leņķisko filtru leņķu izmaiņas

tiek parādīts, ka ar to palīdzību var efektīvi izfiltrēt impulsveidīgus (pulslike) signālus. Piemērs, kas ir aizgūts no publikācijas [6], demonstrē, ka impulsveidīgu signālu, sajauktu ar meandra funkciju var izfiltrēt ar leņķiskajiem filtriem. Par impulsveidīgo signālu ir izvēlēta 2-ā CRA-HT¹ bāzes funkcija 5.3.att.

Leņķiskie filtri izskatās ļoti daudzsoļi, attiecībā uz specifisku signālu filtrāciju.

Secinājumi

- Analizējot pieejamās publikācijas, tika secināts, ka CRAOT un CRAIMOT pārveidojumi ir definēti jau agrāk Endrjū (*Andrews*) darbos kā „Vispārinātā Kronekera matricu klase”. CRMOT un RABOT pārveidojumi netika atrasti.
- Sintezējot RABOT bāzes funkcijas ar *GKP*, ir nepieciešams tāds pats operāciju skaits, kā izmantojot *FMP*. Tas pats ir vērojams arī, rēķinot CRMOT, CRAOT un CRAIMOT.
- Relatīvi neliela RABOT bāzes funkciju skaita ģenerēšanai, ko nosaka formula $M_{\max} \approx \text{round}(1.3 * N^{0.73})$, *SCP₁* pieeja operāciju skaita ziņā ir efektīvākā par citām.
- *FMP* ir daudz izdevīgāka, rēķinot spektru (sintezējot signālu) uzreiz, nevis vispirms rēķinot BF komplektu, bet pēc tam spektru (signālu). Tā, piemēram, priekš $N = 256$ *FMP* pieeja ātrai spektra rēķināšanai prasa 42 reizes (RABOT-am) un 21 reizes (CRAOT-am) mazāk aritmētisko operāciju nekā BF rēķināšana un tiešā spektra rēķināšana.

¹ Constant Rotation Angle Haar Transform - Konstanta rotācijas leņķa Hāra pārveidojums

- Trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās signāla kļūdas ε_{sc}^2 , signāla rekonstrukcijas gadījumā, CRAOT un CRAIMOT gadījumos nav atkarīgas no signāla formas.
- CRAIMOT un CRAOT pārveidojumu matricām trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās vidējās kvadrātiskās kļūdas (bez kvadrātsaknes) $\varepsilon_{i\ sc}^2$ visām bāzes funkcijām ir vienādas.
- Pieaugot pārveidojuma nolašu skaitam ε^{mxmn} , kļūdas monotoni pieaug.
- Trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītās signāla normētās kļūdas $\varepsilon_{sc}^{mxmn,norm}$ signāla rekonstrukcijas un sintēzes gadījumos praktiski nav atkarīgas no vārda garuma.
- Leņķa formētāja posma izraisītās signāla normētās kļūdas $\varepsilon_{\phi}^{mxmn,norm}$ sintezētam signālam praktiski nav atkarīgas no vārda garuma.
- RABOT pārveidojumu aparatūriskajai realizācijai, rēķinot rotāciju pēc (2.3) formulas, bet trigonometriskās funkcijas nolasot no tabulas tika izdarīti šādi secinājumi:
 - saskaitot katra posma radīto kļūdu atsevišķi, pie posmu vienlaicīgas iedarbes kļūdas nav tīri aditīvas un ir nepieciešams koriģējošs reizinātājs (korekcijas koeficients). Korekcijas koeficients ir vismazākais, ja saskaitāmās kļūdas ir aptuveni vienādas. Tā, piemēram, tas ir aptuveni $0.7 \div 0.8$, ja tiek saskaitītas:
 - trigonometrisko funkciju neprecizitāšu un leņķa kvantēšanas izraisītās kļūdas ε^{mxmn} sintezētam signālam;

- trigonometrisko funkciju neprecizitātes un aprēķinu izraisītās kļūdas ε^{mxmn} rekonstruētam signālam.
- Veidojot „leņķiskās” ierīces, ir jāņem vērā, ka, lai pārveidojuma summārā vidējā kvadrātiskā kļūda būtu minimāla (posmu ienestās kļūdas $\varepsilon^{mean \phi, nol}$ tad ir vienādas):
 - signāla rekonstrukcijas gadījumā pārveidojuma aprēķinu posmam ir jāizdala par WL_1 bitiem vairāk nekā trigonometrisko funkciju formēšanas posmam (piemēram, pie nolašu skaita $N = 256$ $WL_1=7$),
 - signāla sintēzes gadījumā pārveidojuma leņķa formēšanas posmam ir jāizdala par WL_1 bitiem vairāk, bet aprēķinu posmam par WL_2 bitiem vairāk nekā trigonometrisko funkciju formēšanas posmam (piemēram, pie nolašu skaita $N = 256$ $WL_1=1$, $WL_2=6$).
- Samazinoties vārda garumam, (vai pieaugot nolašu skaitam), rekonstruētā un sintezētā signāla normētās kļūdas $\varepsilon_{calc}^{mxmn}$, ko izraisa pārveidojuma aprēķinu posms, sasniedz piesātinājumu. Ārpus piesātinājuma apgabala minētās normētās kļūdas nav atkarīgas no vārda garuma.
- Realizācijai ar trigonometrisko funkciju tabulu, aprēķinu kļūdas $\varepsilon_{calc}^{mxmn}$ piesātinājuma beigu punkts (vārda garums, pie kura kļūda iziet no piesātinājuma un sāk samazināties (palielinoties vārda garumam)) ir aprakstāms ar formulām:
 - $WL = round(0.63n + 3.9)$ rekonstruētam signālam,
 - $WL = round(0.625n + 2.8)$ sintezētam signālam

- Lai atrastu rekonstruēto un sintezēto signālu vidējo kvadrātisko kļūdu maksimumu RABOT, CRAIMOT, CRMOT pārveidojumiem, ir pietiekami, ka tiek meklēts CRAOT pārveidojuma vidējās kvadrātiskās kļūdas maksimums, t.i. vidēja kvadrātiskā kļūda, sasniedz maksimālo vērtību gadījumā, kad pārveidojumā visi leņķi ir vienādi.
- Rēķinot trigonometriskās funkcijas, CORDIC algoritms nodrošina labākus rezultātus nekā lineāras interpolācijas algoritms pie vienādiem nosacījumiem (vārda garuma).
- Ar ierobežotu komponentu skaitu sintezētā signāla trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisītā ε_{sc}^{mxmn} kļūda (parciālās summas kļūda) nav atkarīga no summējamo komponentu skaita.
- Mainoties nolašu skaitam diapazonā no $N = 16$ līdz $N = 512$, sintezētā signāla (kā parciālās summas) kļūdas maksimums palielinās 2 reizes,
- Eksistē no kļūdu viedokļa optimālie leņķi. Pielietojot šos optimālos leņķus, var būtiski samazināt trigonometrisko funkciju neprecizitāšu izraisīto kļūdu.

Darbā izmantoto saīsinājumu saraksts

BF	<i>Basis Function(s)</i>	Bāzes funkcija(s)
BIFORE	<i>Binary Fourier Representation</i>	Binārais Furjē pārveidojums
CORDIC	<i>COordinate Rotation Digital Computer</i>	Koordināšu rotācijas algoritms
CRA-HT	<i>Constant Rotation Angle Haar Transform</i>	Konstanta rotācijas leņķa Hāra pārveidojums
CRABOT	<i>Complex Rotation Angle Based Orthogonal Transform</i>	Kompleksie ortogonālie pārveidojumi, balstīti uz rotāciju leņķiem
CRAIMOT	<i>Constant Rotation Angle Inside Matrix Orthogonal Transform</i>	Ortogonalāls pārveidojums ar konstantu rotācijas leņķi vienas matricas ietvaros
CRAOT	<i>Constant Rotation Angle Orthogonal Transform</i>	Konstanta rotācijas leņķa ortogonāls pārveidojums
CRMOT	<i>Constant Rotation Matrix Orthogonal transform</i>	Ortogonalāls pārveidojums ar vienādām rotāciju matricām

DCT	<i>Discrete Cosine Transform</i>	Diskrētais kosinusa pārveidojums
DST	<i>Discrete Sine Transform</i>	Diskrētais sinusa pārveidojums
EVD	<i>Eigenvalue Decomposition</i>	Īpašvērtību dekompozīcija
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>	Ātrais Furjē pārveidojums
FMP	<i>Factorized Matrix Product</i>	Faktorizēto matricu reizinājums
FP	<i>Fixed Point</i>	Fiksētais Punkts (Komats)
FPGA	<i>Field programmable gate array</i>	Programmējamu loģisko ventiļu masīvu lauks
GKP	<i>Generalized Kronecker Product</i>	Vispārinātais Kronekera reizinājums
LININT	<i>Linear Interpolation</i>	Lineārā interpolācija
LOT	<i>Lapped Orthogonal Transform</i>	Ortogonalie pārveidojumi ar pārklājumu
Normētā kļūda		Kļūda, kas tiek normēta ar kvantēšanas soli.

QE	<i>Quantization Error</i>	Kvantēšanas kļūda
RABOT	<i>Rotation Angle Based Orthogonal Transform</i>	Ortogonalie pārveidojumi, balstīti uz rotāciju leņķiem
RABEOT	<i>Rotation Angle Based Extended Orthogonal Transform</i>	Paplašinātie RABOT pārveidojumi
RABREOT	<i>Rotation Angle Based Reduced Extended Orthogonal Transform</i>	Reducētie paplašinātie RABOT pārveidojumi
RABROT	<i>Rotation Angle Based Reduced Orthogonal Transform</i>	Reducētie RABOT pārveidojumi
RA -HT	<i>RABOT – Haar Transform</i>	RABOT-Hāra pārveidojums
SCP	<i>Sine Cosine Power Product</i>	Sinusa un kosinusa pakāpju reizinājums
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>	Singulāro vērtību dekompozīcija
WL	<i>Wordlength</i>	Vārda garums

Izmantotās literatūras saraksts

1. Andrews H. C., Kane J. Kronecker Matrices, Computer Implementation, and Generalized Spectra// Journal of the ACM-1970 – April – vol. 17 - pp.: 260-268.
2. Fino B. J., Algazi V. Ralph A. A Unified Treatment of Discrete Fast Unitary Transforms// SIAM J. Comput. – 1977 - No. 4. - pp. 700–717.
3. Kuhar V. CORDIC IP Block Design: Master of Science Thesis. Stockholm: Sweden 2008. – 43 p.
4. Meyr D. H. CORDIC Algorithms and Architectures. - Signal Processing Series. - Marcel Dekker, Inc., February 1999.
5. Misans P., Terauds M., Aboltins A., Valters G. MATLAB/Simulink Implementation of Phi-Transforms – A New Toolbox Only or the Rival of Wavelet Toolbox for the Next Decade? // Nordic MATLAB User Conference 2008 Proceedings, pp.:1-8. – Stockholm 2008.
6. Misans P., Valters G., Terauds M., Vasilevskis N. Initial Implementation of Generalized Haar-Like Transforms into FPGA-Based Devices - Part II: Parametrical Decomposition-Reconstruction filters// Telecommunications and Electronics – ser.7. vol. 8.– 2008, pp.:22-26.
7. James D. V. Quantization Errors in the Fast Fourier Transform// IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. - 1975. - June - vol. ASSP-23. - No. 3 - pp.: 277-283.

8. Oppenheim V., Weinstein C.J. Effects of Finite Register Length in Digital Filtering and the Fast Fourier Transform// Proc. IEEE (Invited Paper). - 1972. - Aug. – pp.: 957-976.
9. Patterson R.W., McClellan J. H. Fixed-point Error Analysis of Winograd Fourier Transform Algorithms// IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing. - 1978 - Oct. - vol. ASSP-26. - No. 5. - pp.: 447 - 455.
10. Storn R. Some results in fixed point error analysis of the Bruun-FFT algorithm// IEEE Transactions on Signal Processing. - 1993 - July - vol. 41 - issue 7 - pp.:2371 – 2375.
11. Valters G., Misans P. Initial version of FPGA-based CRAIMOT basis functions generator// The 14th IEEE Int. Conf. Mixed Design of Integrated Circuits and Systems – MIXDES 2007. - Ciechocinek, Poland, June 21-23, 2007.
12. Weinstein C. J. Quantization Effects in Digital Filters: Tech. Rep. - Lincoln. Lab., Lexington, Mass. - 1969 - Nov.
13. Welch P. D. A fixed-point fast Fourier transform error analysis// IEEE Trans. Audio Electroacoust. (Special Issue on Fast Fourier Transform). – June 1969 - vol. AU-17 - pp.: 151-157.
14. Yovanof G., Liu S. Statistical Analysis of the DCT Coefficients and their Quantization Error// Signals, Systems and Computers, 1996. - vol. 1. - 3-6 Nov. – pp.:601 – 605.
15. Yun I. D., Lee S. U. On the Fixed-Point-Error Analysis of Several Fast DCT Algorithms// IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. - Feb. 1993 - vol. 3 - No. 1 - pp.: 27-41.
16. Бекерис. Э.П., Зивьев Г.А., Страздинь И.Э. О погрешности определения тригонометрического спектра по спектру Уолша-

Фурье. В кн. Вопросы электродинамики и теории цепей. - Рига: РПИ, 1978. - с.: 76-81.

17. Мисанс П.А. Исследование погрешностей линейных преобразований спектра: диссертация. – Рига 1985 - 192. с.
18. Чайковский В.И. Классификация и оценка принципиальных погрешностей анализаторов спектра// Измерительная техника – 1977 - №5 - с.:43-46.
19. Шубс Ю.В. К оценке погрешностей дискретно-аналоговых анализатора спектра// Изв. Вузов СССР - 1978. - т.20 - №7 - с.: 26-31.
20. Шубс Ю.В. К оценке погрешностей дискретно-аналоговых анализатора спектра// Изв. Вузов СССР - 1977. - т.20 - №7. - с.: 18-21.