Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 79, 2008, стор. 79–89

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 79, 2008, pp. 79–89

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

УДК 519.21

І. В. МАЛИК, Є. Ф. ЦАРКОВ І В. К. ЯСИНСЬКИЙ

Анотація. Одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в скалярному випадку.

1. Вступ

Питанню стійкості за Ляпуновим розв'язків детермінованих диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (ДФРНТ) присвячено достатньо велика кількість робіт, серед яких особливе місце займають праці наукових шкіл Дж. Хейла [15], Н. Азбелєва [1], М. Каменського [3], Д. Хусаинова [13, 12], В. Слюсарчука[9].

У роботах В. Колмановського і В. Носова [8], Є. Царкова [14], Д. Хусаинова [13] та їхніх учнів вивчалися питання поведінки розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР). Питанню існування сильного розв'язку стохастичного ДФРНТ та узагальнення другого методу Ляпунова присвячено роботи В. Колмановського і Л. Шайхета [2], В. Берези, В. Ясинського [7] та інших.

Дана робота присвячена одержанню необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості в середньому квадратичному лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу, проведено аналіз нестійкості, а також розглянуто критичний випадок.

2. Основна частина

Нехай на імовірнісному базисі [7] $(\Omega, F, \mathsf{P}, \Im)$, де $\Im \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ — фільтрація, задано сильний розв'язок [2, 16] $x(t) = x(t,\omega) \in \mathbf{R}^1$ лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (ЛСДРРНТ)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}\,dt + \{Gx_t\}\,dw(t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leq s \leq 0\} \in C([-h,0])$, $\varphi \in C([-h,0])$ — F_0-вимірний випадковий процес, $w(t) = w(t,\omega)$ — одновимірний випадковий вінерів процес, що узгоджений з $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$, D, L, G — різницеві оператори, що задані співвідношеннями

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15; Secondary 60G44.
Ключові слова і фрази. Стохастичні диференціальні рівняння нейтрального типу, різницеві рівняння, власні значення.

для $\psi \in C([-h,0])$

$$\begin{aligned} D\psi &\equiv \psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi(-\tau_k), \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \le h, \\ L\psi &\equiv \alpha\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} b_k \psi(-\lambda_k), \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \le h, \\ G\psi &\equiv f\psi(0) + \sum_{k=1}^{q} g_k \psi(-\theta_k), \qquad 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q \le h. \end{aligned} \tag{3}$$

Для ЛСДРРНТ (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in \mathbf{R}^1$ [5] для якого існує $\mathsf{E}\left\{x^2(t)\right\} < \infty$. Поряд з рівнянням (1) розглянемо детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу [1, 15]

$$d\{Dy_t\} = \{Ly_t\}\,dt. \tag{4}$$

з початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), \qquad -h \le t \le 0. \tag{5}$$

Наведемо спочатку деякі твердження.

Лема 2.1. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| < 1, \tag{6}$$

то розв'язок $y(t) \equiv 0$ ДДРРНТ (4), (5) є експоненціально стійкий тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома

$$V(z) \equiv z\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-z\tau_k}\delta_k\right) - a - \sum_{l=1}^{m} e^{-z\lambda_l} b_l \tag{7}$$

лежать в лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$, тобто

$$\exists \rho > 0, \quad \forall z \in \mathbf{C}\colon \qquad V(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z < -\rho. \tag{8}$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [15] як розв'язок (4), що задовольняє початкову умову

$$X(t) \equiv \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & -h \le t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Тоді вірне твердження [4, 15], щодо зображення функції Коші $X(t)$ за характеристичним квазіполіномом.

Лема 2.2. *Функція Коші $X(t)$ має вигляд*

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} z = \mu} e^{zt} V^{-1}(z)\,dz, \tag{10}$$

де $\mu > -\rho$.

Далі має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. *Розв'язок ЛСДРРНТ (1), (2) задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s) G x_s\,dw(s), \tag{11}$$

де $y(t)$ — розв'язок (4), (2).

Доведення. Враховуючи лінійність різницевого оператора нейтральності D, отримаємо

$$Dx_t = Dy_t + \int_0^t DX_{t-s}Gx_s\,dw(s). \tag{12}$$

Підставимо (12) в (1) і, врахувавши лінійність різницевого оператора L, отримаємо

$$\begin{aligned} dDx_t &= dDy_t + d\int_0^t DX_{t-s}Gx_s\,dw(s) \\ &= Ly_t\,dt + DX_0Gx_t\,dw(t) + \int_0^t d_tDX_{t-s}Gx_s\,dw(s) \\ &= Ly_t\,dt + Gx_t\,dw(t) + \int_0^t (LX_{t-s}\,dt)\,Gx_s\,dw(s) \\ &= Ly_t\,dt + Gx_t\,dw(t) + L\left\{\int_0^t X(t-s)\,dtGx_s\,dw(s)\right\}\,dt \\ &= L\left\{y_t + \int_0^t X(t-s)\,dtGx_s\,dw(s)\right\}\,dt + Gx_t\,dw(t) = Lx_t\,dt + Gx_t\,dw(t). \end{aligned}$$

Тут перестановка оператора L з операцією інтегрування обґрунтована за лінійністю різницевого оператора L. Таким чином, випадковий процес, який задано (11), задовольняє ЛСДРРНТ. Теорема 2.1. доведена. □

Дамо означення експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку ЛСДРРНТ (1), (2).

Означення 2.1. Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) назвемо експоненціально стійким в середньому квадратичному, якщо існують сталі $M > 0$ і $c > 0$, такі що для всіх $t \geq 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$

$$\mathsf{E}\,|x(t)|^2 \leq Me^{-ct}\,\mathsf{E}\,\|\varphi\|^2, \tag{13}$$

де $\|\varphi\| \equiv \max_{-h\leq t\leq 0} |\varphi(t)|$, $\mathsf{E}\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання.

Для одержання необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ ЛСДРРНТ (1), (2) введемо наступні позначення і пов'язані з ними твердження.

Використовуючи інтегральне представлення (11) сильного розв'язку (1), а також представлення функції Коші $X(t)$ у вигляді (10), запишемо інтегральне рівняння Вольтерри нейтрального типу для випадкового процесу $\gamma(t) \equiv Gx_t$:

$$\gamma(t) \equiv Gy_t + \int_0^t H(t-s)\gamma(t)\,dw(s), \tag{14}$$

де

$$H(t) \equiv GX_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,z=\mu} e^{zt}G_1(z)V^{-1}(z)\,dz, \tag{15}$$

а

$$G_1(z) \equiv f + \sum_{i=1}^q g_ie^{-z\theta_i}. \tag{16}$$

Дійсно, слід подіяти різницевим оператором G на обидві частини рівняння (10), в результаті отримаємо

$$GX_t = G\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,z=\mu} e^{zt}V^{-1}(z)\,dz\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,z=\mu}\left\{fe^{zt}+\sum_{k=1}^{q} g_k e^{z(t-\theta_k)}\right\}V^{-1}(z)\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,z=\mu}\left\{f+\sum_{k=1}^{q} g_k e^{-z\theta_k}\right\}e^{zt}V^{-1}(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,z=\mu} G_1(z)e^{zt}V^{-1}(z)\,dz,$$

що дає (14).

Введемо наступні позначення

$$M(t,\varphi) \equiv \mathsf{E}\left\{|x(t)|^2 \;/\; F^0\right\} = \mathsf{E}\left\{|x(t)|^2\right\},$$
$$\Gamma(t,\varphi) \equiv \mathsf{E}\left\{|\gamma(t)|^2 \;/\; F^0\right\} = \mathsf{E}\left\{|\gamma(t)|^2\right\}.$$

Тут умовні математичні сподівання рівні звичайним в силу незалежності випадкових процесів $x(t)$ і $\gamma(t)$ від початкової σ-алгебри F_0 [7].

Далі піднесемо до квадрату інтегральне представлення (11) сильного розв'язку ЛСДРРНТ, обчислимо математичне сподівання і, враховуючи рівність 0 математичного сподівання від інтегралу Вінера–Іто і рівність математичного сподівання від квадрату інтегралу Вінера–Іто звичайному інтегралу Рімана [7], одержимо рівняння для другого моменту $M(t,\varphi)$ вигляду

$$M(t,\varphi) = |y(t)|^2 + \int_0^t |X(t-s)|^2\,\Gamma(s,\varphi)\,ds. \tag{17}$$

Аналогічно матимемо

$$\Gamma(t,\varphi) = |Gy_t|^2 + \int_0^t |H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds. \tag{18}$$

Доведемо допоміжне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови* (6) *і* (8). *Тоді розв'язок інтегрального рівняння* (18) *задовольняє умову:*

$$\exists C_1>0,\quad \exists C_2>0,\quad \forall\varphi\in C([-h,0])\colon\qquad \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{tC_2}\,dt < C_1\|\varphi\|^2, \tag{19}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$B \equiv \int_0^\infty |H(t)|^2 dt < 1. \tag{20}$$

Доведення. За умов (6) і (8) існує така константа $M>0$, що

$$|H(t)| \le Me^{-\rho t}, \qquad |Gy_t| \le Me^{-\rho t}\|\varphi\| \tag{21}$$

для $\varphi \in C([-h,0])$. Значить можна застосувати перетворення Лапласа до (18) і отримати рівняння для зображень

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt}\,dt + \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\,dt \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt, \tag{22}$$

яке еквівалентне рівнянню

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}\,dt = \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt}\,dt \left(1-\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\,dt\right)^{-1} \tag{23}$$

для достатньо великого $\mathrm{Re}\,z$. Не втрачаючи загальності візьмемо $\mathrm{Im}\,z=0$. Зауважимо, що функція $R(z) = \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\,ds$ як функція від $z\in\mathbf{R}$ є неперервною функцією, а також $R(z)$ є спадною функцією на $(-\rho,\infty)$ при $\mathrm{Im}\,z=0$.

Достатність. Нехай виконується (20). Значить існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\,dt < 1,$$

де $z \in [-\varepsilon, \infty)$. Тоді для $z \in [-\varepsilon, \infty)$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt &< \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt}\,dt \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{\varepsilon}\,dt\right)^{-1} \\ &\le \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{\varepsilon}\,dt \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{\varepsilon}\,dt\right)^{-1} \\ &\le M^2 \|\varphi\|^2 (\rho-\varepsilon)^{-1} \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{\varepsilon}\,dt\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{24}$$

Якщо в нерівності (24) покласти $C_2 = \varepsilon$ і $C_1 = M^2(\rho-\varepsilon)^{-1}\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{\varepsilon}\,dt\right)^{-1}$, то одержимо з (24) умову (19).

Необхідність. Нехай виконується (19) та $\operatorname{Im} z = 0$. Доведемо виконання (20) від супротивного. Припустимо що (20) не виконується, тобто

$$\int_0^\infty |H(t)|^2\,dt \ge 1.$$

Значить, $\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\,dt > 1$ для $z < 0$. А це означає, що

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty |Gy_t|^2\, e^{-zt}\,dt \left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\,dt\right)^{-1} < 0, \tag{25}$$

а значить за припущенням супротивного, одержали $\Gamma(t,\varphi) < 0$ для $\operatorname{Re} z < 0$, що неможливо (бо за означенням$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}\,dt > 0$). Прийшли до суперечності. Теорема 2.2 доведена. □

Лема 2.3. *В умові* (20) *інтеграл в лівій частині нерівності обчислюється наступним чином*

$$B \equiv \int_0^\infty |H(t)|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2}\,ds.$$

Доведення. Якщо замість $H(t)$ підставимо його інтегральний вигляд (15), то матимемо

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty G_1(is)e^{zt}V^{-1}(is)\,ds. \tag{26}$$

Зауважимо, що $G_1(is)e^{zt}V^{-1}(is)$ є образом для $H(t)$ або

$$G_1(is)e^{zt}V^{-1}(is) = \int_0^\infty e^{-ist}H(t)\,dt. \tag{27}$$

Тоді за рівністю Планшереля–Парсеваля [4] одержимо

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |H(t)|^2\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |G(is)|^2|V(is)|^{-2}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^0 |G(is)|^2|V(is)|^{-2}\,ds + \int_0^\infty |G(is)|^2|V(is)|^{-2}\,ds\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty |G(-is)|^2\,|V(-is)|^{-2}\,ds + \int_0^\infty |G(is)|^2|V(is)|^{-2}\,ds\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |G(is)|^2|V(is)|^{-2}\,ds.\end{aligned}$$

Лему 2.3. доведено. □

Теорема 2.3. *Нехай виконується умови* (6) *і* (8) *для коефіцієнтів ЛСДРРНТ і коренів його характеристичного квазіполінома* (7). *Тоді необхідною і достатньою умовою експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку* (1), (2) *є виконання інтегральної нерівності*

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2}\, ds < 1, \tag{28}$$

де $G(z) \equiv f + \sum_{r=1}^q g_r e^{-z\theta_r}$.

Тоді при $B > 1$ *буде мати місце наступний факт: в будь–якому околі нуля знайдеться початкова функція* $\varphi(t)$ *така, що*

$$\lim_{t\to\infty} M\left\{|x(t)|^2\right\} = \infty. \tag{29}$$

Доведення. 1. Достатність. Нехай виконується (28), а значить виконується (20). Умови (6) і (8) гарантують [15] існування деякої сталої $M_2 > 0$ та $c_2 > 0$ таких, що

$$\begin{aligned} |Gy_t|^2 e^{tc_2} \le M_2\|\varphi\|^2, \qquad |y(t)|^2 e^{tc_2} \le M_2\|\varphi\|^2,\\ |X(t)|^2 e^{tc_2} \le M_2, \qquad |H(t)|^2 e^{tc_2} \le M_2 \end{aligned} \tag{30}$$

для довільного $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$.

Зауважимо, що сталу $c_2 > 0$ для виконання оцінок (30) слід вибирати як у теоремі 2.2.

Далі за виконання нерівностей (30) очевидна оцінка для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$

$$\begin{aligned} \Gamma(t,\varphi)e^{tc_2} &= |Gy_t|^2 e^{tc_2} + \int_0^t |H(t-s)|^2 e^{(t-s)c_2} e^{sc_2}\Gamma(s,\varphi)\, ds\\ &\le M_2\|\varphi\|^2 + M_2\int_0^t e^{sc_2}\Gamma(s,\varphi)\, ds \le M_2(1+c_1)\|\varphi\|^2. \end{aligned} \tag{31}$$

де c_1 визначена в доведенні теореми 2.2.

Тоді з врахуванням одержаних нерівностей (30), (31) легко виписати оцінку для $M(t,\varphi)$, що задовольняє рівняння (17), а саме

$$M(t,\varphi) \le M_2\,(1+c_1)\,\|\varphi\|^2 e^{-tc_2}$$

для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$.

Це гарантує виконання умови (13) експоненціальної стійкості. Достатність доведено.

Необхідність. При виконанні умов (6), (8) нехай розв'язок $x(t) \equiv 0$ експоненціально стійкий, тобто $\mathsf{E}\,|x(t)|^2 \le Me^{-ct}\,\mathsf{E}\,\|\varphi\|^2$ для $t > 0$ і $\varphi \in C([-h, 0])$, де $M > 0$ та $c > 0$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \Gamma(t,\varphi) = \mathsf{E}\left\{|Gx_t|^2\right\} &\le (q+1)\left(|f|^2 + \sum_{r=1}^q |g_r|^2\right)\max_{-h\le\theta\le 0}\mathsf{E}\left\{|x(t+\theta)|^2\right\}\\ &\le M(1+q)\left(|f|^2 + \sum_{r=1}^q |g_r|^2\right)e^{-ct}\|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

А значить можна підібрати сталу $A_1 > 0$ таку, що

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{tc_2 dt} < c_1\|\varphi\|.$$

Залишилось використати теорему 2.2, що дає нерівність (28), якщо врахувати рівність (26) леми 2.3.

Доведення 2. З рівності (23) отримуємо, що полюси $1 - \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}\, dt$ збігаються з нулями функції $1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\, dt$, а $\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\, dt$ — неперервна спадна функція дійсного аргументу λ, така що $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\, dt = 0$.

Отже, оскільки виконується (29), то знайдеться $\lambda_0 > 0$, таке що

$$1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda_0 t}\, dt = 0.$$

А це означає, що функція $\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{-\lambda t}\, dt$ має полюс при $\lambda = \lambda_0 > 0$. Це ж в свою чергу означає, що $\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_0 t} = \infty$, що і доводить (29). Теореми 2.3. доведена. $\square$

3. Критичний випадок

Розглянемо поведінку розв'язку ЛСДРРНТ (1), (2), якщо $B = 1$.

Теорема 3.1. *Нехай:*

1) *виконуються умови* (6), (8),
2)
$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds = 1, \tag{32}$$
3)
$$f + \sum_{k=1}^{q} g_k \neq 0.$$

Тоді знайдеться така початкова функція $\varphi \in C[-h, 0]$, *що*

$$0 < \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\, |x(t)|^2 < \infty. \tag{33}$$

Доведення. Нехай сильний розв'язок (1) побудовано за початковою умовою

$$x(t) \equiv \varepsilon 1(t) = \begin{cases} 0, & -h \le t < 0, \\ \varepsilon, & t = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Тоді $y(t) = \varepsilon X(t)$ є розв'язком детермінованого рівняння (4), а рівняння (12) для $\Gamma(t,\varphi)$ прийме вигляд

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{-zt}\, dt &= \varepsilon \int_0^\infty |GX_t|^2 e^{-zt}\, dt + \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, ds \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{-zt}\, dt \\ &= \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, ds \left(\varepsilon + \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{-zt}\, dt \right). \end{aligned} \tag{35}$$

Звідси

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{-zt}\, dt = \frac{\varepsilon \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, dt}{\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, dt\right)}. \tag{36}$$

Відомий факт зв'язку поведінки при $t \to \infty$ оригінала $\Gamma(t,\varphi)$ і при $z \to 0$ зображення для нього [6], а саме

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) = \varepsilon \lim_{z\to 0} \frac{z \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, dt}{\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, dt\right)}. \tag{37}$$

Очевидно, що границю при $z \to 0$ в правій частині рівняння (31) можна обчислити за правилом Лопіталя, а саме

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{\varepsilon z \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, ds}{\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, dt\right)} &= \lim_{z\to 0} \frac{\left(\varepsilon z \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, ds\right)'}{\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, dt\right)'} \\ &= \varepsilon \lim_{z\to 0} \frac{\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, ds - z \int_0^\infty |H(t)|^2 t e^{-zt}\, ds}{\int_0^\infty |H(t)|^2 t e^{-zt}\, dt} \\ &= \varepsilon \lim_{z\to 0} \frac{\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}\, ds}{\int_0^\infty |H(t)|^2 t e^{-zt}\, dt} = \frac{\varepsilon}{\int_0^\infty |H(t)|^2 t\, dt}. \end{aligned} \tag{38}$$

За виконання умов (8) існує інтеграл в знаменнику правої частини (38)

$$\varepsilon = \varepsilon \int_0^\infty |H(t)|^2 \, dt \le \int_0^\infty |H(t)|^2 t \, dt \le K \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{\rho t/2} \, dt = c < \infty, \tag{39}$$

де $K = \rho/2$. Значить, одержимо нерівність

$$\frac{\varepsilon}{C} \le \lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) \le 1. \tag{40}$$

Оскільки $\Gamma(t,\varphi) = M\left\{Gx_t\right\}^2$, то за умови існування $\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi)$ можна довести, що

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) = \left(f + \sum_{k=1}^{q} g_k\right)^2 \lim_{t\to\infty} M\left\{x^2(t)\right\}. \tag{41}$$

Тобто, з (40) та (41) отримуємо

$$0 < \frac{\varepsilon}{C}\left(f + \sum_{k=1}^{q} g_k\right)^{-2} \le \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,|x(t)|^2 \le \left(f + \sum_{k=1}^{q} g_k\right)^{-2} < \infty.$$

Теорема 3.1. доведена. □

Поряд з рівнянням (1) буде розглядатися збурене рівняння

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}\,dt + (1+\alpha(t))\{Gx_t\}\,dw(t). \tag{42}$$

Припустимо, що виконується умова (32). Розглянемо питання асимптотичної стійкості та нестійкості задачі (42), (2) (задачі (1), (2) при постійно діючих збуреннях).

Позначимо через $\Re_1$ простір неперервних на $[0,\infty)$ функцій ϕ, для яких

$$\exists \varepsilon \in (0,1), \quad \forall t > 0\colon \qquad (1+\phi(t))^2 < 1-\varepsilon.$$

Через $\Re_2$ простір неперервних на $[0,\infty)$ функцій ϕ, для яких

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall t > 0\colon \qquad (1+\phi(t))^2 > 1+\varepsilon.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови* (6), (8) *та* $B = 1$. *Тоді*

А) *тривіальний розв'язок рівняння* (42) *асимптотично стійкий в середньому квадратичному, якщо* $\alpha \in \Re_1$.

Б) *тривіальний розв'язок рівняння* (42) *нестійкий в середньому квадратичному, якщо* $\alpha \in \Re_2$.

Доведення. Запишемо рівняння (42) у вигляді інтегрального рівняння, а саме

$$x(t) = y(t) + \int_0^t (1+\alpha(s))X(t-s)Gx_s\,dw(s), \tag{43}$$

де $y(t)$ — розв'язок задачі (4), (2), а $X(t)$ — її фундаментальний розв'язок, $t \ge 0$.

Справді, використавши для (43) лінійний оператор D і продиференціювавши (43), отримаємо

$$\begin{aligned} dDx_t &= dDy_t + dD\left\{\int_0^t (1+\alpha(s))X(t-s)Gx_s\,dw(s)\right\} \\ &= Ly_t\,dt + Dd\left\{\int_0^t (1+\alpha(s))X(t-s)Gx_s\,dw(s)\right\} \\ &= Ly_t\,dt + \int_0^t (1+\alpha(s))\,dDX(t-s)Gx_s\,dw(s) + (1+\alpha(t))Gx_t\,dw(t) \\ &= Ly_t\,dt + \int_0^t (1+\alpha(s))LX(t-s)Gx_s\,dw(s)\,dt + (1+\alpha(t))Gx_t\,dw(t) \\ &= L\left\{y_t + \int_0^t (1+\alpha(s))X(t-s)Gx_s\,dw(s)\right\}\,dt + (1+\alpha(t))Gx_t\,dw(t) \\ &= Lx_t + (1+\alpha(t))Gx_t\,dw(t), \end{aligned}$$

що доводить (43).

Тоді, використовуючи інтегральне рівняння (43) та рівність (18), отримаємо

$$\Gamma(t,\varphi) = |Gy_t|^2 + \int_0^t (1+\alpha(s))^2|H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds. \tag{44}$$

A) Нехай $\alpha \in \Re_1$. Тоді з рівності (44) випливає нерівність

$$\Gamma(t,\varphi) < |Gy_t|^2 + (1-\varepsilon)\int_0^t |H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds. \tag{45}$$

Використовуючи перетворення Лапласа для (45), отримаємо нерівність для образів, а саме:

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt < \int_0^\infty |Gy_t|^2e^{-zt}\,dt + (1-\varepsilon)\int_0^\infty |H(t)|^2e^{-zt}\,ds\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt$$

або

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt < \int_0^\infty |Gy_t|^2e^{-zt}\,dt\left(1-(1-\varepsilon)\int_0^\infty |H(t)|^2e^{-zt}\,dt\right)^{-1}. \tag{46}$$

За умови виконання $B = 1$, очевидно, що полюс з найбільшою дійсною частиною для правої частини нерівності (46) буде полюс λ_0, для якого виконується рівність

$$\int_0^\infty |H(t)|^2e^{-\lambda_0 t}\,dt = \frac{1}{1-\varepsilon} > 1. \tag{47}$$

Оскільки перетворення Лапласа дійсного аргументу ($\lambda \in \mathbf{R}$) є спадною неперервною функцією та $B = 1$, то $\lambda_0 < 0$. А це означає, що $\Gamma(t,\varphi)$ поводить себе на ∞ як функція, яка по модулю не перевищує $Ne^{\lambda_0 t}$, $N > 0$, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\Gamma(t,\varphi) = 0, \tag{48}$$

а значить A) доведено.

B) Нехай $\alpha \in \Re_2$. Тоді з рівності (44) випливає нерівність

$$\Gamma(t,\varphi) > |Gy_t|^2 + (1+\varepsilon)\int_0^t |H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds. \tag{49}$$

Використовуючи перетворення Лапласа для (49), отримаємо нерівність для образів:

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt > \int_0^\infty |Gy_t|^2e^{-zt}\,dt + (1+\varepsilon)\int_0^\infty |H(t)|^2e^{-zt}\,dt\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}\,dt$$

або

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}\,dt > \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt}\,dt \left(1-(1+\varepsilon)\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\,dt\right)^{-1}. \tag{50}$$

За умови виконання $B = 1$, очевидно що полюс з найбільшою дійсною частиною для правої частини нерівності (46) буде полюс λ_0, для якого виконується рівність

$$\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t} ds = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1. \tag{51}$$

Оскільки перетворення Лапласа дійсного аргументу ($\lambda \in R$) є спадною неперервною функцією та $B = 1$, то $\lambda_0 > 0$. А це означає, що $\Gamma(t,\varphi)$ поводить себе на ∞ як функція, яка по модулю не менша ніж $\delta e^{\lambda_0 t}$ тобто

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) = \infty. \tag{52}$$

Значить Б) доведено. Теорема 3.2 доведена. □

Зауваження 3.1. В умові теореми 4.2. простори $\Re_1$ та $\Re_2$ можна замінити на більш “ширші простори”, а саме

$$\widetilde{\Re}_1 \equiv \left\{\phi \in C^0([0,\infty])\colon \exists\varepsilon > 0, \forall t \in [0,h]\colon (1+\phi(t))^2 < 1-\varepsilon; \forall t > h\colon (1+\phi(t))^2 \le 1\right\},$$

$$\widetilde{\Re}_2 \equiv \left\{\phi \in C^0([0,\infty])\colon \exists\varepsilon > 0, \forall t \in [0,h]\colon (1+\phi(t))^2 > 1+\varepsilon; \forall t > h\colon (1+\phi(t))^2 \ge 1\right\}.$$

Доведення. Доведемо, наприклад, першу частину зауваження:

Нерівність (45) перепишеться у вигляді

$$\Gamma(t,\varphi) \le |Gy_t|^2 + (1-\varepsilon)\int_0^t |H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds$$

для $t \in [0,h]$ і

$$\Gamma(t,\varphi) \le |Gy_t|^2 + (1-\varepsilon)\int_0^h |H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds + \int_h^t |H(t-s)|^2\Gamma(s,\varphi)\,ds$$

для $t > h$.

Тоді нерівність (46) прийме вигляд

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}\,dt$$
$$< \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt}\,dt \left(1-\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\,dt + \varepsilon\int_0^h |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\,dt\right)^{-1}. \tag{53}$$

Оскільки $B = 1$ та $\int_0^h |H(t)|^2 e^{-\lambda t}\,dt = K > 0$, то можна стверджувати, що всі полюси правої частини (53) лежать в лівій півплощині комплексної площини, а це означає що $\Gamma(t,\varphi)$ на ∞ поводить себе як експонента з від'ємним показником, тобто розв'язок збуреного рівняння (42) експоненціально стійкий в середньому квадратичному. Зауваження 3.1. доведено. □

Література

1. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений*, “Наука”, Москва, 1991.
2. Е. А. Андреева, Л. Е. Шайхет, В. Б. Колмановский, *Управление системами с последействием*, “Наука”, Москва, 1992.
3. Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др., *Теория уравнений нейтрального типа*, Итоги науки и техники, сер. Математический анализ **1** (1981), № 1, 55–126.
4. Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, “Наука’, Москва, 1967.
5. В. Ю. Береза, В. К. Ясинський, *Про існування розв'язків стохастичних диференціально–функціональних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями*, Вісник Київського університету, серія: Фізико-математичні науки **5** (2002), № 1, 19–27.

6. Г. Деч, *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*, "Наука", Москва, 1971.
7. Ж. Жакод, А. Н. Ширяєв, *Предельные теоремы для случайных процессов*, т. 2, "Физматизд", Москва, 1994.
8. В. Б. Колмановский, В. Р. Носов, *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с послидействием*, "Наука", Москва, 1981.
9. В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Монографія, Вид-во УДУВГП, Рівне, 2003.
10. И. Я. Снекторский, *Обобщенные формулы вариации постоянной линейного неоднородного стохастического уравнения*, Проблемы управления и информатики **1** (1998), № 5, 107–112.
11. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, "Мир", Москва, 1996.
12. Д. Я. Хусаинов, *Оценки решений линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа*, Укр. мат. журн. **1** (1991), № 9, 1123–1135.
13. Д. Я. Хусаинов, А. В. Шатырко, *Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем*, Изд-во КНУ, Киев, 1997.
14. Е. Ф. Царьков, *Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений*, "Зинатне", Рига, 1989.
15. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, 1978.
16. I. I. Gihman and A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 1972.

Кафедра математичної і прикладної статистики, факультет прикладної математики, ЧНУ ім. Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58000, Україна
Адреса електронної пошти: M_Ihor_V@rambler.ru

Кафедра теорії ймовірностей і математичної статистики, Ризький технічний університет, Рига, Латвія
Адреса електронної пошти: carkovs@livas.lv

Кафедра математичної і прикладної статистики, факультет прикладної математики, ЧНУ ім. Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58000, Україна
Адреса електронної пошти: yasinsk@cv.ukrtel.net

Надійшла 20/02/2008