

СИНТЕЗ ВЫСОКОИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ЧАСТОТНЫМ И ВРЕМЕННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

В. Еремеев, Д. Сипченко, С. Шарковский

*Институт транспорта и связи
Ломоносова 1, Рига, LV 1019, Латвия
Тел: (+371)-7100650. Факс: (+371)-7100660. E-mail: vy@tsi.lv*

Рассматривается синтез полосовых цифровых фильтров с несимметрично заданными амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ) соответственно в верхней и нижней полосах задерживания. Разработан алгоритм, процедура проектирования и приведены примеры синтеза. Показано, что порядок фильтров часто ниже, а избирательность выше, чем у эллиптических реализаций.

Рассматривается синтез высокоизбирательных фильтров с требуемыми временными характеристиками. Табулированы фильтры с заданными параметрами переходных характеристик. Приведены примеры синтеза цифровых фильтров, обеспечивающих малые искажения огибающей фильтруемых сигналов.

Ключевые слова: цифровые фильтры, совместные требования к частотным и временным характеристикам, неискажение огибающей фильтруемых модулированных сигналов

Синтез фильтров при специальных требованиях к их частотным и временным характеристикам, как правило, весьма сложен. Традиционные процедуры синтеза не применимы, а желаемый набор практических требований слишком широк и разнообразен. В статье мы рассмотрим решение задачи синтеза для двух классов задач.

Во-первых, покажем метод синтеза цифровых фильтров (ЦФ) при нестандартных требованиях к АЧХ в полосах задерживания (рис. 1), а во-вторых, покажем процедуру синтеза высокоизбирательных цифровых полосовых фильтров (ПФ) с заданными ограничениями на воспроизведение формы огибающей фильтруемых модулированных сигналов.

При проектировании фильтров разработчики часто сталкиваются с несимметричными требованиями к АЧХ (рис. 1). Ориентированные, например, на максимальную избирательность эллиптические фильтры при этих требованиях, как правило, не эффективны, прежде всего, потому, что имеют при реализации одинаковое число полюсов в обеих полосах задерживания.

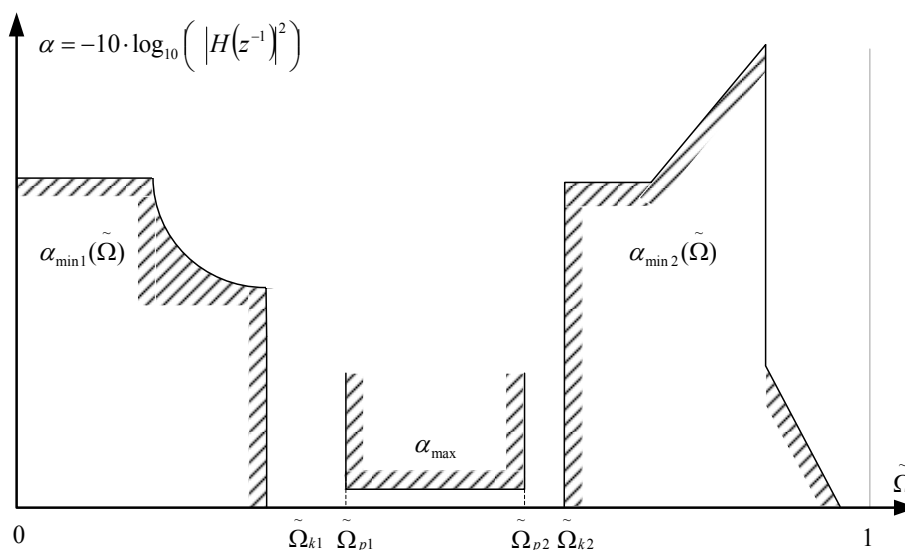


Рис. 1. Пример требований общего вида к АЧХ ЦФ

Пример особо несимметричных требований к АЧХ показан на рис. 2. В этом случае требуется выделить низкочастотный спектр с шириной полосы $\tilde{\Omega}_{p2}$. Дополнительное условие – возможно более полное подавление постоянной составляющей. Попытка удовлетворить эти требования известными методами приводит к неудаче потому, что синтез полосового фильтра с чрезвычайно малой шириной левой полосы задерживания практически невозможен.

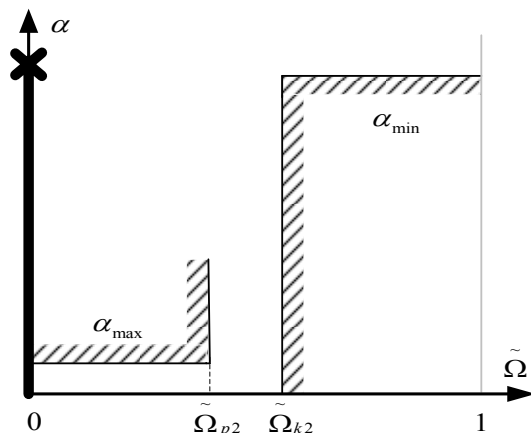


Рис. 2. Пример экстремально несимметричных требований к АЧХ

За основу концептуального решения проблемы взяты предложенные в 70-х годах идеи [2, 3]. Проектирование фильтров с несимметричными АЧХ сведено к задаче синтеза фильтров с автоматически равноволновой характеристикой затухания в полосе пропускания при произвольно заданных полюсах затухания в полосах задерживания (рис. 3).

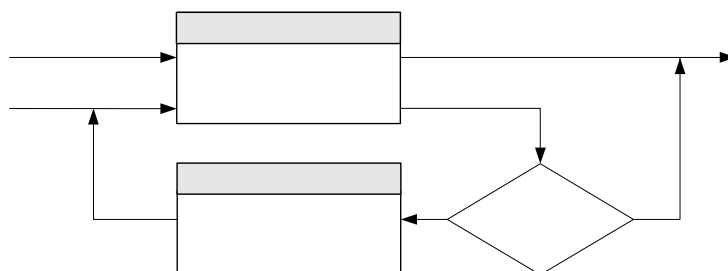


Рис. 3. Упрощенная схема решения

Расчет аналоговых фильтров по этой методике частично производился графически, а также использовались упрощенные формулы и некорректные приближения [3]. Синтезированы фильтры не выше 5 порядка (в зависимости от требований к характеристикам).

Основной целью этой работы является разработка методики и создание пакета машинных программ, автоматизирующих процедуру синтеза цифровых фильтров заданного порядка при несимметричных требованиях к АЧХ. Важный аспект проблемы – сопоставление качества получаемых решений с альтернативными реализациями, также синтезируемых при условии обеспечения максимально возможной избирательности.

При проектировании фильтров этого класса традиционные частотные преобразования, применяемые, в частности, для синтеза эллиптических фильтров, оказываются практически неприемлемыми. Возникает необходимость в использовании таких частотных преобразований, которые позволяют проще контролировать параметры амплитудно-частотной характеристики в

полосах пропускания и задерживания. Одним из таких преобразований является **D** – преобразование [2]:

$$D = \sqrt{\frac{s^2 + Wp_2^2}{s^2 + Wp_1^2}}, \quad \text{где } s = j\omega. \quad (1)$$

Главной особенностью и преимуществом этого преобразования является автоматическое обеспечение равноволнового затухания в полосе пропускания при произвольных заданных полюсах АЧХ.

Преобразование (1) трансформирует частоты следующим образом:

полоса пропускания ($Wp_1 \leq |\omega| \leq Wp_2$) отображается на мнимую ось y плоскости **D**;

нижняя полоса характеристики затухания ($|\omega| < Wp_1$) отображается в интервал $Wp_2 / Wp_1 \leq D \leq \infty$;

верхняя полоса характеристики затухания ($|\omega| > Wp_2$) отображается на отрезок $0 < D \leq 1$.

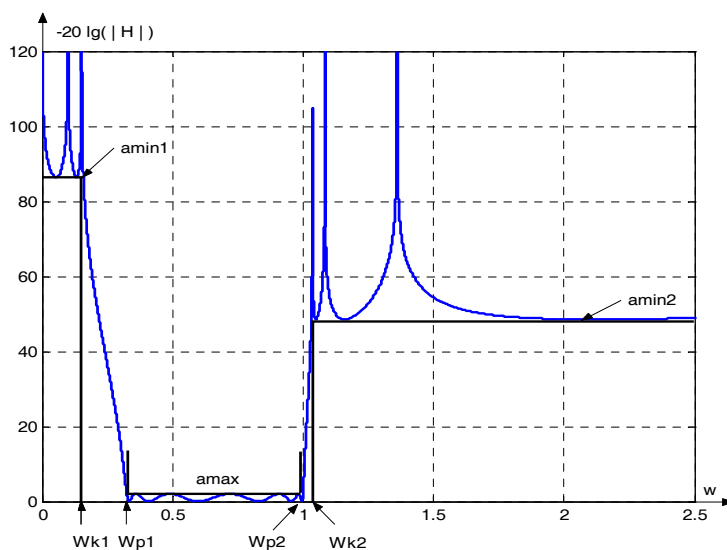


Рис. 4. Пример реализации несимметричных требований к затуханию

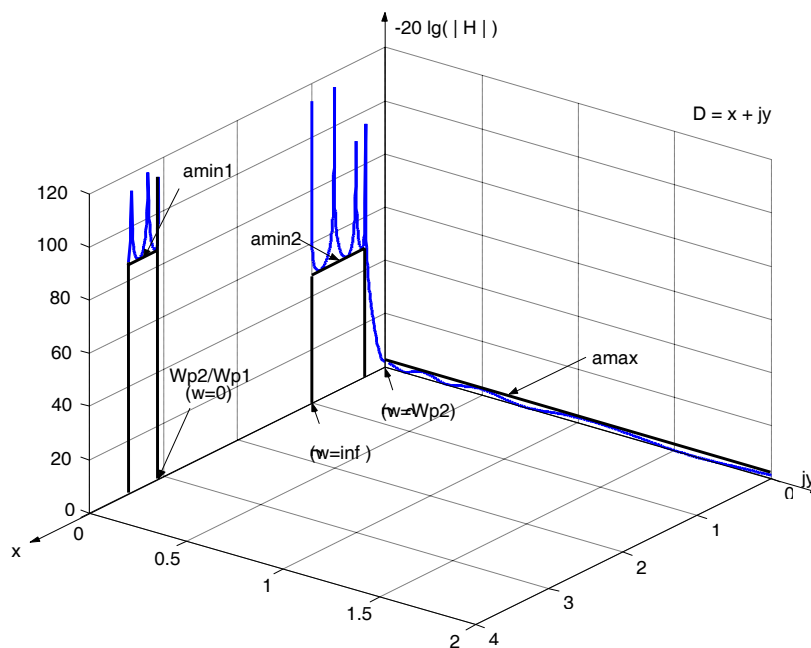


Рис. 5. Преобразованная характеристика затухания ПФ (Рис.4) в область **D**

Расчет квадрата модуля передаточной функции

Если контрольные частоты ω_k и полоса пропускания ω_p заданы для цифрового фильтра, то их можно пересчитать в область s [5, 6]:

$$\omega = k \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \tilde{\Omega}\right), \quad \text{где} \quad k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \tilde{\Omega}_{p2}\right). \quad (1.1)$$

Переход в область D :

$$D = \sqrt{\frac{s^2 + Wp_2^2}{s^2 + Wp_1^2}} \Big|_{s=j\omega} = \sqrt{\frac{Wp_2^2 - \omega^2}{Wp_1^2 - \omega^2}}, \quad (1.2)$$

Определение полинома

$$E(D^2) + D \cdot F(D^2) = \prod_{i=1}^n (D + D_i), \quad (1.3)$$

где D_i – это преобразованные по формуле (1.2) произвольно заданные полюса затухания ω_i , а $E(D^2)$ и $F(D^2)$ – четные полиномы.

По полиномам $E(D^2)$ и $F(D^2)$ находим квадрат модуля функции фильтрации K :

$$|K|^2 = k_p^2 \frac{E^2}{E^2 - D^2 F^2} = k_p^2 \frac{1}{1 - D^2 \left(\frac{F}{E}\right)^2}, \quad (1.4)$$

где

$$k_p^2 = \left(H_{\min}^2 - 1\right) \Big|_{H_{\min} = 10^{-\frac{a_{\max}}{20}}} = 10^{\frac{a_{\max}}{10}} - 1. \quad (1.5)$$

Выполнив частотную подстановку (1.2), переходим в область s :

$$|K(D^2)|^2 \rightarrow \left| K\left(\frac{s^2 + Wp_2^2}{s^2 + Wp_1^2}\right) \right|^2 \rightarrow |K(s^2)|^2.$$

Если известна функция фильтрации K , то затухание $\alpha(\omega)$ рассчитывается по формуле:

$$\alpha(\omega) = 10 \cdot \lg(1 + |K(j\omega)|^2). \quad (1.6)$$

Из уравнения Фельдткеллера находим передаточную функцию H :

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + |K(s)|^2} = \frac{1}{1 + K(s) \cdot K(-s)}, \quad \text{где} \quad s = j\omega. \quad (1.7)$$

Этапы решения задачи. Задаются требования для ЦФ. Параметры его АЧХ пересчитываются в аналоговую область s . Далее осуществляется переход в область D , где

рассчитывается квадрат модуля передаточной функции. После этого, чтобы найти коэффициенты ЦФ, выполняется обратная цепочка преобразований $D \rightarrow s \rightarrow z^{-1}$.

Пример расчета ЦФ с несимметричными требованиями к АЧХ.

Требования к ЦФ.

Полоса пропускания: $w_p = [0.31 \ 0.5]$

Затухание в полосе пропускания: $a_{max} = 0.1$ дБ

Полоса задерживания слева: $w_{sL} = [0.2 \ 0.29]$

Требования к затуханию в полосе задерживания слева: $a_{minL} = 70$ дБ

Полоса задерживания справа: $w_{sR} = [0.6 \ 0.7]$

Требования к затуханию в полосе задерживания справа: $a_{minR} = 85$ дБ

Переход в область переменной s :

$$w = k \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\Omega} \right), \quad \text{где} \quad k = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \tilde{\Omega}_{p2} \right)$$

Полоса пропускания: $W_p = [0.5295 \ 1.000]$.

Найденные оптимизационной процедурой полюса:

$P_w =$
 0.48809060412320 0.48809060412320
 0.47163862427415 0.47163862427415
 0.42731776626501 0.42731776626501
 0.34677573219694 0.34677573219694
 1.39273423259607 1.39273423259607
 1.54201187423860 1.54201187423860
 1.87026075450237 1.87026075450237

Переход в область переменной D :

$$D = \sqrt{\frac{s^2 + W_{p2}^2}{s^2 + W_{p1}^2}} \Big|_{s=jw} = \sqrt{\frac{W_{p2}^2 - w^2}{W_{p1}^2 - w^2}}$$

Полюса:

$D_i =$
 4.25328056170906 4.25328056170906
 3.66465296296213 3.66465296296213
 2.89187150394471 2.89187150394471
 2.34422576475163 2.34422576475163
 0.75253265937875 0.75253265937875
 0.81048769147769 0.81048769147769
 0.88109717762229 0.88109717762229

Расчет коэффициентов полинома:

$$E(D^2) + D \cdot F(D^2) = \prod_{i=1}^n (D + D_i)$$

1.0e+005 * [0.00001000000000 0.00031196296644 0.00439226542096
 0.03691982185424 0.20656305399722 0.81208474873773
 2.30900891094492 4.81546184194783 7.39320900411043
 8.31132615797469 6.73652664199642 3.82143446272065
 1.43661421721184 0.32102990296790 0.03224495661640]

E(D²):

1.0e+005 * [0.00001000000000 0.00439226542096 0.20656305399722
 2.30900891094492 7.39320900411043 6.73652664199642
 1.43661421721184 0.03224495661640]

F(D²):

1.0e+005 * [0.00031196296644 0.03691982185424 0.81208474873773
 4.81546184194783 8.31132615797468 3.82143446272064
 0.32102990296790]

Квадрат модуля передаточной функции в области переменной D:

$$|H|^2 = \frac{E^2 - F^2}{H_{\min}^2 \cdot E^2 - F^2}, \quad \text{где} \quad H_{\min}^2 = 10^{-\frac{a_{\max}}{10}}$$

Поиск корней, пересчет в область переменной s и расчет коэффициентов передаточной функции фильтра в области s:

$$D^2 = \frac{s^2 + Wp_2^2}{s^2 + Wp_1^2}$$

Ks = 8.462793699943554e-004

As =

1.00000000000000 0.23823243783335
 1.00000000000000 0.22244299190721
 1.00000000000000 0.18260047336572
 1.00000000000000 0.12025340844073
 1.00000000000000 1.93970864264498
 1.00000000000000 2.37780062029285
 1.00000000000000 3.49787528983177

Bs =

1.00000000000000 0.01081031628082 0.27708839715875
 1.00000000000000 0.03987599640797 0.29078097216177
 1.00000000000000 0.09379988275821 0.33095892106398
 1.00000000000000 0.18128470349769 0.43594130650842
 1.00000000000000 0.23554315000882 0.65125738386724
 1.00000000000000 0.17360120346503 0.89323099176577
 1.00000000000000 0.05902638850855 1.03145737029216

Коэффициенты ЦФ [5,6]:

$$s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad k = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi wp_2}{2}\right)$$

K = 0.00235458855242

A =

1.00000000000000 -1.23041125218716 1.00000000000000
 1.00000000000000 -1.27213622760383 1.00000000000000
 1.00000000000000 -1.38237645771938 1.00000000000000
 1.00000000000000 -1.57062069158761 1.00000000000000
 1.00000000000000 0.63932093746507 1.00000000000000
 1.00000000000000 0.81579748195641 1.00000000000000
 1.00000000000000 1.11069121701913 1.00000000000000

B =

1.00000000000000	-1.12262818842497	0.98324680733871
1.00000000000000	-1.06598327964831	0.94007009906147
1.00000000000000	-0.93916401488469	0.86832776315388
1.00000000000000	-0.69756320778456	0.77580781046127
1.00000000000000	-0.36966558943690	0.75032532980801
1.00000000000000	-0.10331657139547	0.83201229017337
1.00000000000000	0.03009578059976	0.94352848889296

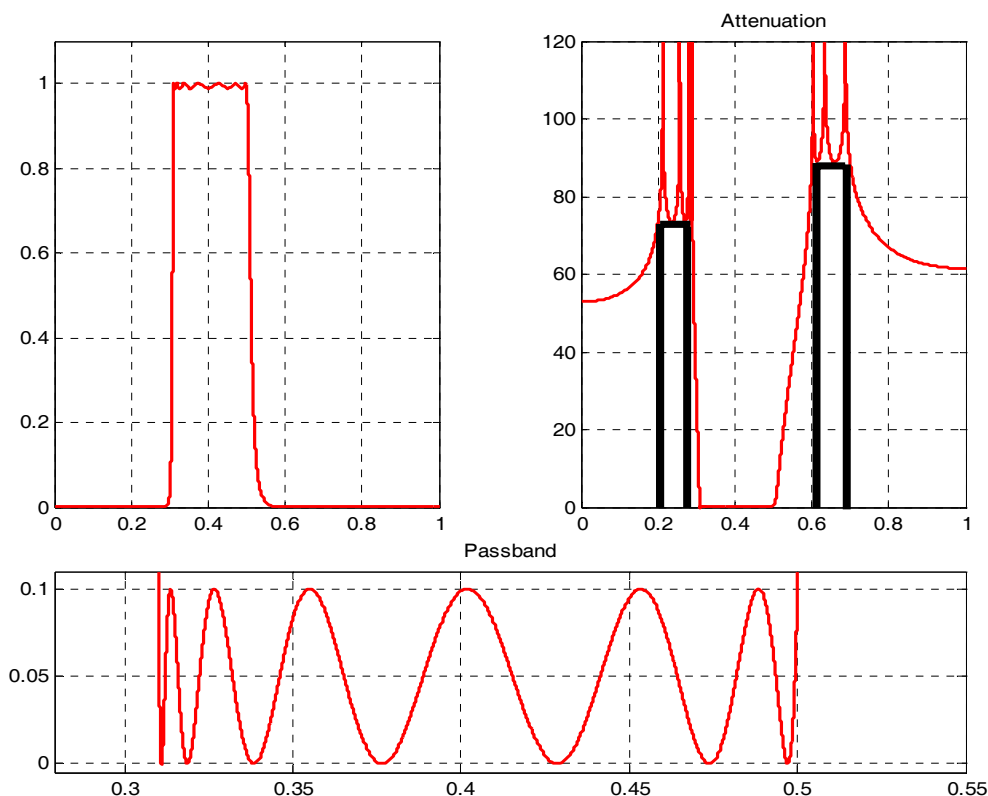


Рис. 6. АЧХ и характеристика затухания синтезированного ПФ

Оптимизация временных характеристик высокоизбирательных фильтров

Проблема синтеза высокоизбирательных цифровых фильтров, которые минимально искажают форму огибающей обрабатываемых радиоимпульсных сигналов остается остро актуальной [1]. В принципе для проектирования дискретных систем можно использовать два класса преобразований (стандартное z -преобразование и билинейное).

z -преобразование воспроизводит только временные характеристики аналогового прототипа, но при этом неизбежны искажения его частотных характеристик. Билинейное преобразование, наоборот, позволяет контролировать параметры частотных характеристик и, как правило, не гарантирует качество воспроизведения временных.

Известные фильтры (Баттерворта, Чебышева и эллиптические) имеют временные характеристики с пульсациями около 20% .

Вместе с тем есть один очень интересный класс аналоговых фильтров с оптимальными временными характеристиками. Параметры прототипов этих фильтров получены в работе [7]. Пульсации переходной характеристики этого класса фильтров – не более одного процента. Фильтры относительно высокоизбирательны. Найдем, например, коэффициент прямоугольности полосовых фильтров, синтезированных по прототипам 4-го и 6-го порядка. Коэффициент прямоугольности – это отношение $\Delta\omega_1$ к $\Delta\omega_2$, определяемых нами на уровнях 40 и 15 дБ соответственно (рис. 7).

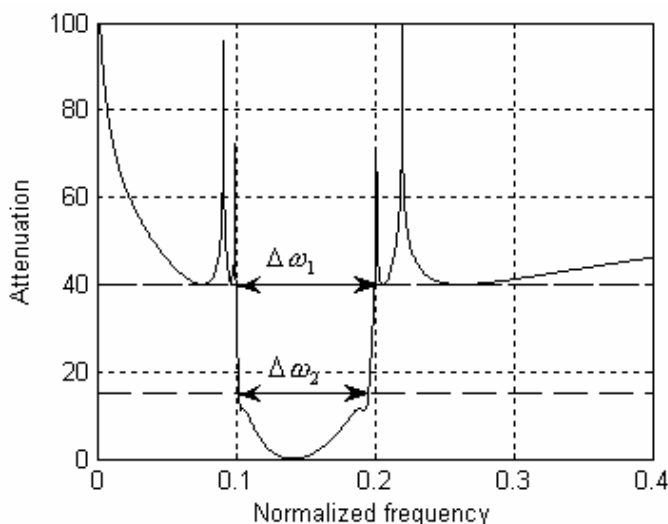


Рис. 7. Характеристика затухания полосового фильтра с нормированной полосой пропускания 0.1, синтезированного по прототипу 6-го порядка

$$K_6 = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} = 1.0730$$

Для сравнения найдем коэффициент прямоугольности эллиптического фильтра того же порядка с такой же полосой пропускания, с пульсациями затухания в полосе задерживания 40 дБ и разными пульсациями в полосе пропускания – 0.5 и 0.2 дБ.

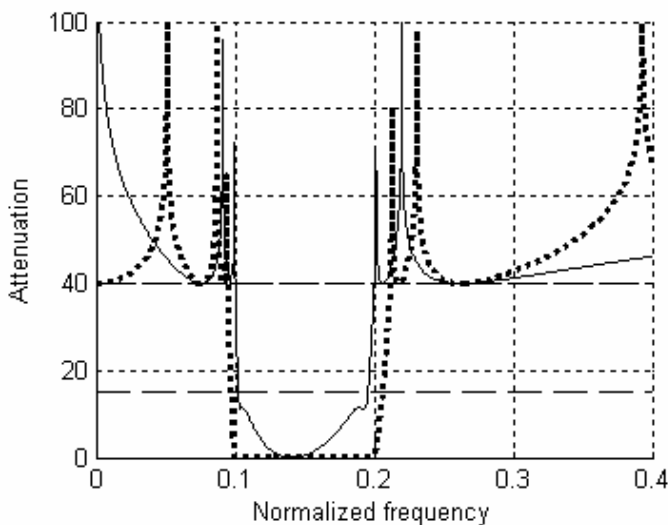


Рис. 8. Затухание эллиптического фильтра и фильтра с оптимальными временными характеристиками

$$K_{\text{ellip}_0.5} = 1.0632, \quad K_{\text{ellip}_0.2} = 1.0744.$$

Таким образом, фильтры Джесса-Шуслера почти не уступают эллиптическим фильтрам по избирательности, а в некоторых случаях их даже превосходят.

Следует заметить, что при синтезе цифровых фильтров с использованием билинейного преобразования по прототипам Джесса-Шуслера сохраняются основные параметры их временных характеристик. В частности, уровень пульсаций тот же. Покажем, например, отклик (и огибающую) цифрового полосового фильтра (ЦПФ) на модулированный сигнал с несущей частотой, равной центральной частоте настройки фильтра. Для синтеза ЦПФ применено специальное модифицированное частотное преобразование, обеспечивающее факторизованное

представление передаточной функции для удобства вычисления временных характеристик. А для нахождения огибающей, чтобы исключить ошибки традиционного преобразования Гильберта, на вход подается сигнал $e^{j\omega T}$.

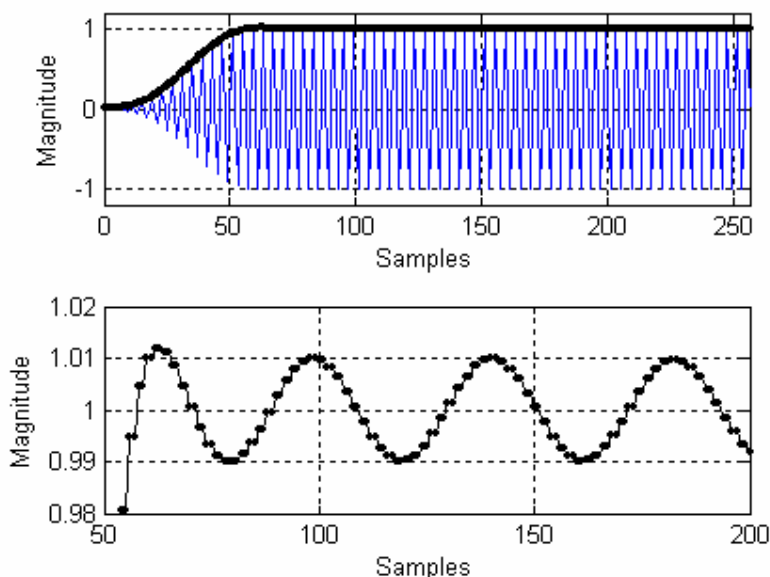


Рис. 9. Радиопульсный сигнал и его огибающая на выходе ЦПФ 7-го порядка

Задача синтеза прототипов более высоких порядков решалась путем локальной оптимизации. Критерии выбора целевой функции следующие: пульсации переходной характеристики не должны превышать одного процента, а АЧХ выше контрольной частоты должна быть ниже уровня 0.01 (40 дБ).

Выбор минимизируемой целевой функции производился следующим образом:

$$Q = \alpha \cdot F_1(z, p) + (1 - \alpha) \cdot F_2(z, p),$$

где \mathbf{z} и \mathbf{p} – нули и полюса передаточной характеристики прототипа, $F_1(z,p)$ – целевая функция для $H(\Omega)$, $F_2(z,p)$ – целевая функция для $g(t)$.

$F_1(z,p)$ контролирует выполнение $H(\Omega) \leq \Delta$, при $\Omega \in [1, \infty]$, а $F_2(z,p)$ пропорционально $a(t) = |1 - g(t)|$, при $t \in [t_2, \infty]$, где t_2 – начало интервала оценки уровня пульсаций переходной характеристики.

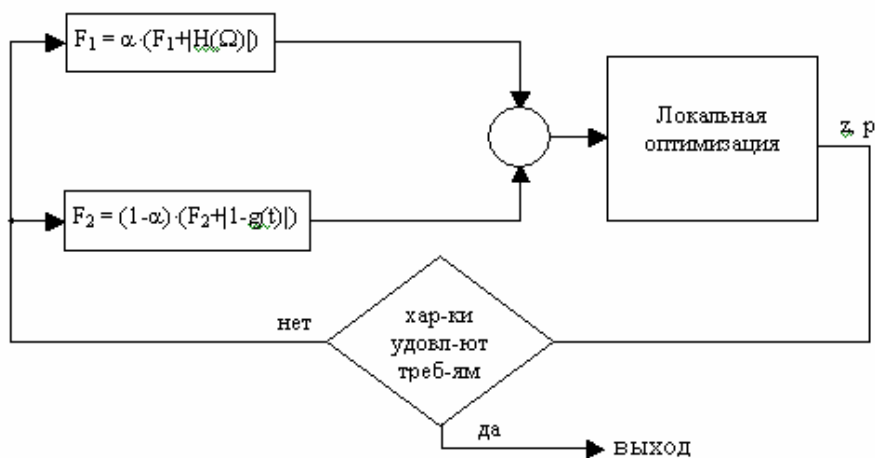


Рис. 10. Упрощенная блок-схема решения

Покажем, например, полученные путем предложенной оптимизации характеристики прототипа 9-го порядка.

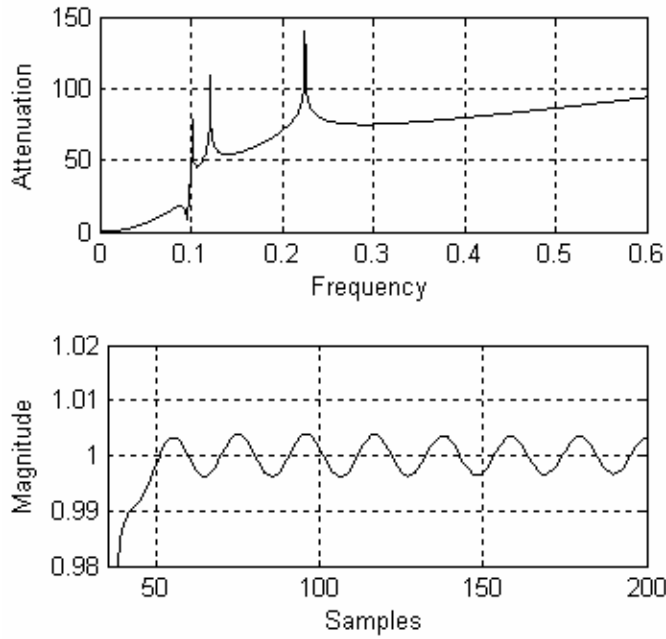


Рис. 11. АЧХ и пульсации переходной характеристики прототипа 9-го порядка

Характеристики ЦПФ синтезированного по прототипу 9-го порядка

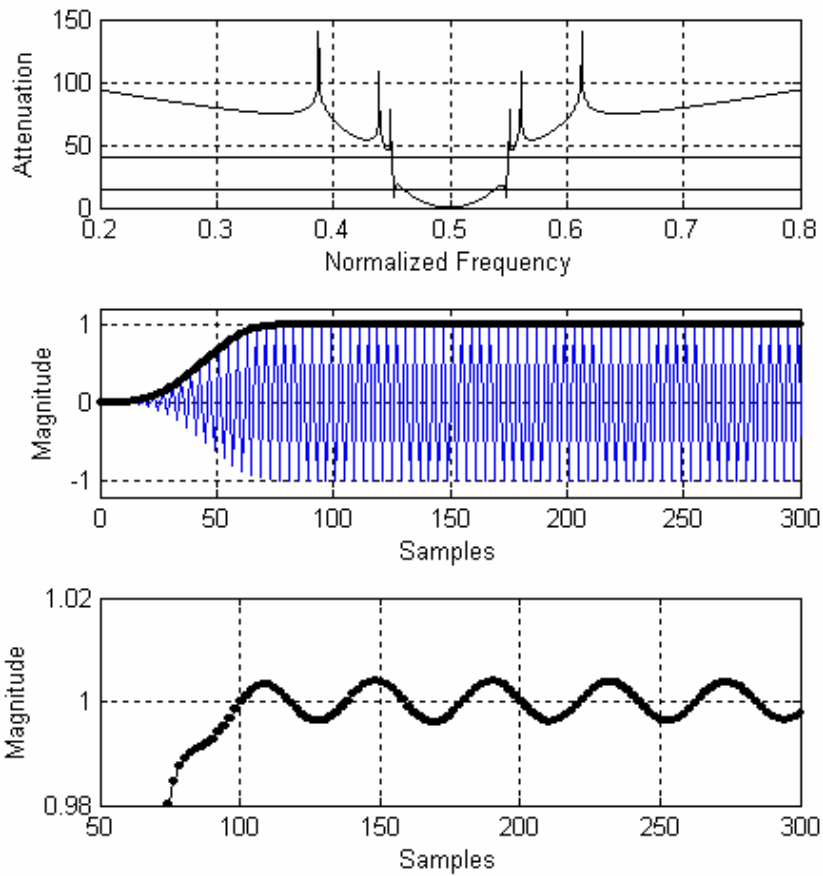


Рис. 12. АЧХ, а также выходной сигнал и его огибающая на выходе ЦПФ 9-го порядка

В ходе работы выдвинута и проверена гипотеза о том, что не менее хорошие характеристики могут быть получены при кратных корнях в знаменателе $H(p)$.

С помощью предложенных оптимизационных программ синтезированы прототипы соответственно 8-го, 9-го и 10-го порядков, знаменатель $H(p)$ которых содержит только кратный корень. Покажем характеристики ЦФНЧ и ЦПФ 9-го порядка, синтезированные по прототипу с кратным корнем в знаменателе $H(p)$.

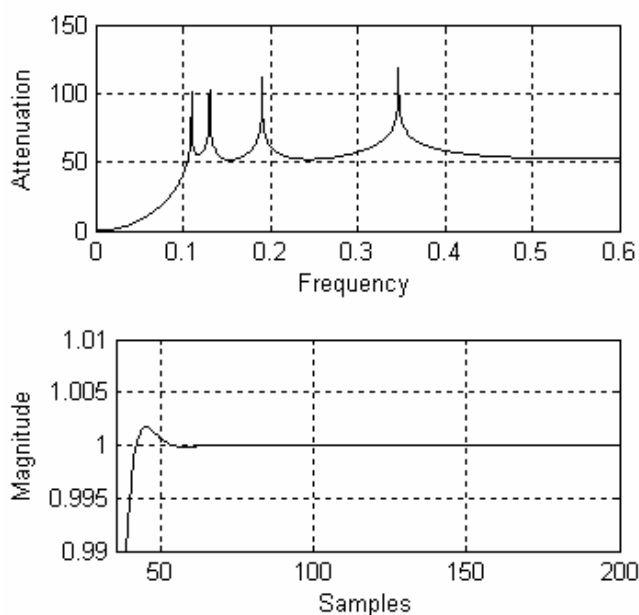


Рис. 13. Характеристика затухания и переходная характеристика ЦФНЧ 9-го порядка с кратным корнем в знаменателе $H(p)$

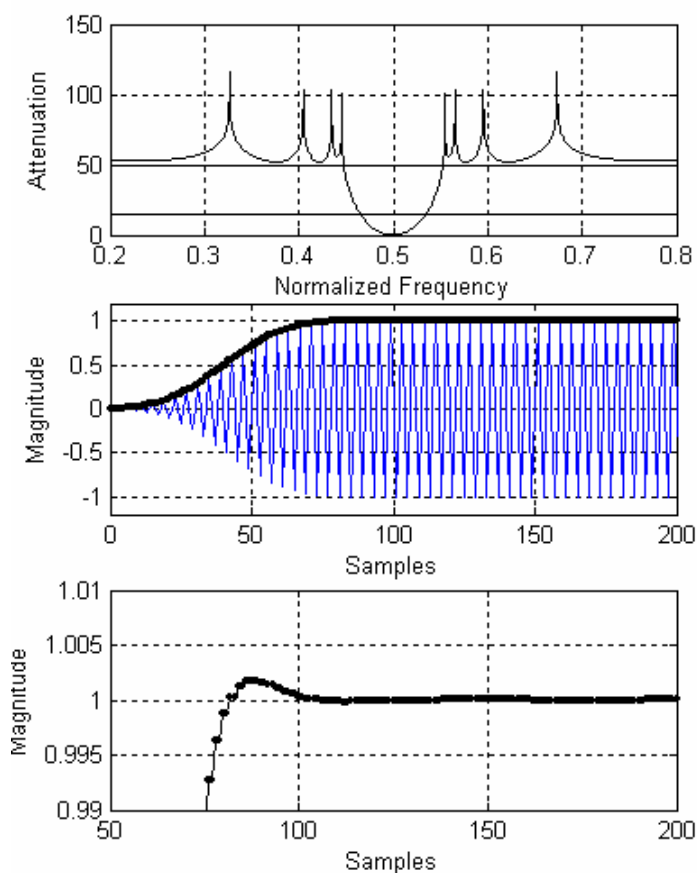


Рис. 14. Характеристики ЦПФ, синтезированного по прототипу 9-го порядка с кратным корнем в знаменателе $H(p)$, с нормированной полосой пропускания 0.1

На графиках (рис. 13, 14) видно, что переходная характеристика имеет единственную пульсацию, которую удалось снизить до 1% (а в некоторых случаях ниже 0.5%).

Параметры синтезированных прототипов приведены в таблице 1.

Таблица 1

N	$p = a \pm jb$	z	K	δ %	a_{\max} дБ
2	-0.08001672466977±j0.05125676661633	–	9.029932350838701e-003	0.7	40
2	-0.11857821297168±j0.0583775809534	1.4	8.912619668126464e-003	0.2	41
3	-0.131639±0.209160I -0.161733	–	9.878123083779094e-003	1	40
3	-0.204109±0.333536I -0.257533	1.15208	2.966840929546982e-002	1	40
4	-0.309621±0.187608I -0.184237±0.588981I	1.08723	4.222585004038969e-002	1	40
5	-0.358806±0.438024I -0.101265±0.848436I -0.433476	1.03356 1.50870	4.172937539900596e-002	1	40
6	-0.364052±0.172023i -0.276182±0.523364i -0.067376±0.854364i	1.03562	3.888023302531690e-002	1	40
6	-0.484417±0.209888i -0.352882±0.627593i -0.033230±0.917535i	1.01869 1.28812	7.073569376396918e-002	1	40
7	-0.511206±0.392152i -0.339762±0.768383i -0.007883±0.939117I -0.562022	1.01339 1.20594	9.725225748051672e-002	1	40
8	-0.64209987978233±0.02006420522673I -0.45975220441306±0.44138287813557I -0.32984869537467±0.76017926197441I -0.03525565185923±0.90565426197441I	1.05004458527534 1.19044585275342 1.70469835209858 4.80762123211069	9.009510233996531e-004	0.9	50
8	-0.94964233349920±0.65644811845750i -0.94964233349920±0.65644811845750i -0.94964233349920±0.65644811845750i -0.94964233349920±0.65644811845750i	1.05067956048504 1.48979868363319 2.44508635806548 6.64749744668641	4.874020426606254e-003	0.6	40
8	-0.14263728557955±0.97963902147554i -0.14263728557955±0.97963902147554i -0.66723904024037±0.37894798756101i -0.66723904024037±0.37894798756101i	1.0151644837829 1.1374057115804 1.7049978079046 3.68842223820366	6.315429937238186e-00	1	41
9	-0.61671239480954±0.24243117957339i -0.56229567886143±0.54108501836862i -0.32863010845284±0.82516935422761i -0.00572369537683±0.95732247922761i -0.632375	1.0166401211592 1.2166110581237 2.33166857922208	0.01469974819473	0.4	40
9	-0.92843260532671±0.745i -0.92843260532671±0.745i -0.92843260532671±0.745i -0.92843260532671±0.745i -0.79394056788760	1.0980355279464 1.3133105044062 1.9502732735557 3.82747008682973	2.762485851158740e-002	0.2	40
10	-0.9690046875±0.3847833984375i -0.6692775±0.42485887095014i -0.6258580078125±0.4375125i -0.82426620804966±0.3655716520924i -0.78302421875±0.7874125i	1.0225471370940 1.3228757816836 1.7287710507625 5.87240116800423	2.117784388010734e-003	0.3	65

Пример синтеза полосового цифрового фильтра 6-го порядка.

Синтезировать цифровой полосовой фильтр с заданными параметрами:

- нормированная центральная частота $\omega_0 = 0.5$
- нормированная полоса пропускания (по уровню a_{\min}) $\Delta\omega = 0.01$
- затухание в полосе задерживания $a_{\min} = 40\text{дБ}$
- коэффициент прямоугольности по уровням 40дБ и 15дБ $K_p = 1.08$
- пульсации переходной характеристики $\delta = 1\%$.

Передаточная функция синтезируемого фильтра имеет следующий вид:

$$H(p) = K \frac{\prod_{\mu=1}^M (p^2 + z_{\mu}^2)}{\prod_{\nu=1}^N (p - p_{\nu})}$$

Из таблицы 1 выбираем прототип с $N = 6, M = 2$:

$$K = 7.073569376396918e - 002$$

$$z_1 = 1.01869i, z_2 = 1.28812i$$

$$p_{1,2} = -0.484417 \pm 0.209888i,$$

$$p_{3,4} = -0.352882 \pm 0.627593i,$$

$$p_{5,6} = -0.033230 \pm 0.917535i.$$

Передаточная функция цифрового полосового фильтра:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(n)z^{-n}}{1 + a(1)z^{-1} + \dots + a(n)z^{-n}}, \text{ где } n - \text{порядок фильтра } n = 2N.$$

Коэффициенты $a(k)$ и $b(k), k = 0 \dots n$:

a =	b =
1.0000000000000000e+000	1.715839577665343e+000
0	0
5.364030880660907e+000	2.983283926173879e+000
0	0
1.209782682355040e+001	-1.688005824280962e+000
0	0
1.467355861349494e+001	-6.022235359116521e+000
0	0
1.008867374957780e+001	-1.688005824280962e+000
0	0
3.726132139749442e+000	2.983283926173879e+000
0	0
5.773124417384713e-001	1.715839577665343e+000

Отметим замечательное свойство синтезированных фильтров. Их групповое время задержки (ГВЗ) практически постоянно в полосе пропускания!

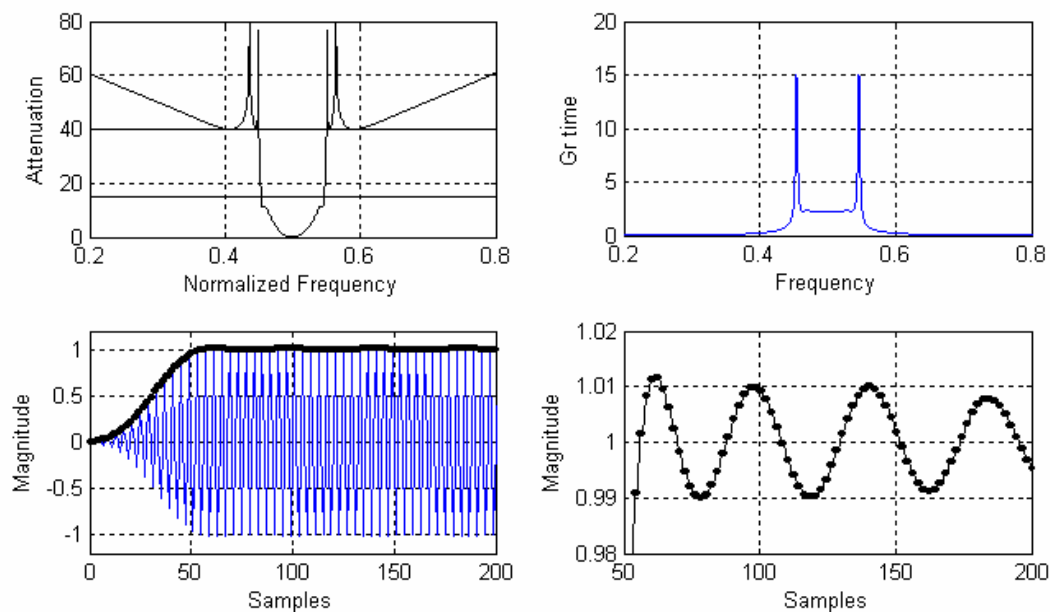


Рис. 15. Временные и частотные характеристики ЦПФ 6-го порядка

$$K_p \approx 1.064$$

Литература

- [1] Ланнэ А.А. *Потенциальные характеристики линейных фильтрующих цепей*. Связь, Москва, 1974. 56 с.
- [2] Белецкий А.Ф. *Теоретические основы электропроводной связи, Ч.3*. Москва: Связьиздат, 1959.
- [3] Херреро Д., Уиллонер Г. *Синтез фильтров*. Москва: Советское радио, 1971. 232 с.
- [4] Рабинер Л., Гоулд Б. *Теория и применение цифровой обработки сигналов*. Москва: Мир, 1978. 848 с.
- [5] Антонью А. *Цифровые фильтры: анализ и проектирование*. Москва: Радио и связь, 1983. 320 с.
- [6] Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б., Гук И.И. *Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций*. БХВ-Петербург, 2003. 608 с.
- [7] Jess J., Schüssler H.W. On the Design of Pulse-Forming Networks, *IEEE Trans. On CT*, 1965.