

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Elektrisko mašīnu un aparātu katedra

A. Zviedris

Elektromagnētisko ierīču magnētisko sistēmu optimizācija

Lekciju konspekts

Rīgas Tehniskā universitāte
Rīga 2004

Šajā mācību līdzeklī aplūkoti optimizācijas vispārīgi jautājumi: optimizācijas uzdevuma nostādne, optimizācijas uzdevumu struktūra, metodes un algoritmi, kā arī doti šo algoritmu datorrealizācijas programmu piemēri. Sīkāk iztirzāti jautājumi, kas saistīti ar elektromagnētisko ierīču magnētisko sistēmu optimizācijas teorētiskajiem un praktiskajiem aspektiem, kā arī detalizēti aplūkots konkrētas ierīces (droseles ar feromagnētisku serdi) optimizācijas uzdevums.

Lekciju konspekts paredzēts kā mācību palīglīdzeklis elektrotehnisko specialitāšu studentiem mācību priekšmeta “Elektrisko mašīnu magnētiskās sistēmas un to optimizācija” apguvei.

Ievads

Magnētiskā sistēma ir jebkuras elektromagnētiskas ierīces (elektromašīnas, transformatora, elektromagnētiskā komutācijas aparāta u. tml.) raksturīga sastāvdaļa. To veido no feromagnētiska materiāla izgatavotu elementu kopums un atsevišķos gadījumos ietver arī nelielas gaisa spraugas.

Magnētiskā sistēma (šaurākā nozīmē to sauc arī par magnēt vadu) paredzēta magnētiskās plūsmas koncentrēšanai, virzīšanai noteiktā virzienā, magnētiskās pretestības samazināšanai, nodrošinot ierīcē noteikta lieluma un rakstura magnētisko lauku.

Magnētiskās sistēmas konstruktīvais izveidojums un tās atsevišķu elementu forma un ģeometriskie izmēri būtiski nosaka ierīces elektromagnētiskos raksturlielumus, kā arī tās tehniski ekonomiskos rādītājus.

Visbiežāk magnētisko sistēmu feromagnētiskos elementus izgatavo no elektrotehniskā lokšņu tērauda, retāk no lietā tērauda vai čuguna vai arī no feromagnētiska materiāla pulvera, izmantojot metālkeramikas tehnoloģiju.

Problēmas, kas saistītas ar magnētisko sistēmu un tās atsevišķu elementu izvēli, projektēšanu un izveidošanu, visaktuālākas ir tieši dažādos elektroenerģijas pārveidotājos. Šādiem pārveidotājiem pieskaitāmas rotējošās elektromašīnas, transformatori, kā arī citas statiskas elektromagnētiskas ierīces, piemēram, magnētiskie pastiprinātāji, reaktori, u. tml. Tāpēc arī šādu ierīču magnētiskajām sistēmām turpmāk veltīta lielāka uzmanība. Tajā pašā laikā magnētisko sistēmu optimizācijas metodoloģiskie pamati, kā arī matemātiskais aparāts ir izmantojams arī visdažādākajām citām elektromagnētiskām ierīcēm.

1. Elektromašīnu un transformatoru magnētiskās sistēmas un to raksturīgās īpatnības

Elektromašīnu un transformatoru magnētisko sistēmu izveidojums var būt ļoti daudzveidīgs un tas atkarīgs no vairākiem faktoriem, no kuriem galvenie ir:

- mašīnas tips, piemēram, līdzstrāvas mašīna, sinhronmašīna, asinhronmašīna, transformators;
- nominālie parametri, piemēram, jauda, rotācijas frekvence, fāžu skaits;
- materiāls un ražošanas tehnoloģija.

Vēsturiskās attīstības gaitā, ievērojot minētos, kā arī citus faktorus, ir iegūta noteikta pieredze attiecībā uz elektromašīnu un transformatoru pamattipu racionālāku konstruktīvo izveidojumu. Tā, piemēram, līdzstrāvas mašīnās enkurs ir rotors, bet induktors (magnētiskās sistēmas daļa, kas ierosina magnētisko lauku) stators. Turpretim sinhronajās mašīnās (izņemot nelielas jaudas mašīnas) induktors ir rotors, bet enkurs stators. Līdzstrāvas mašīnas (izņemot speciālas nozīmes mašīnas, piemēram, elektromašīnpastiprinātājus) izveido ar izvērztaiem poliem, bet sinhronmašīnas atkarībā no rotācijas frekvences izveido gan ar izvērztiem, gan

neizvirzītiem poliem. Asinhronmašīnas (izņemot atsevišķu tipu mikromašīnas) izveido tikai ar neizvirzītiem poliem. Transformatori un tiem līdzīgas elektromagnētiskās ierīces ir veidotas no taisnstūra formas magnētvardiem, uz kuriem novietotas tinumu spoles. Atbilstoši šīm minētajām konstruktīvajām īpatnībām dažādu elektromašīnu un transformatoru magnētiskās sistēmas, kā arī to atsevišķo elementu konstruktīvais izveidojums var būt ļoti dažāds.

Rotējošās elektromašīnās magnētiskā sistēma parasti sastāv no vairākām konstruktīvi atdalītām daļām – statora un rotora. Savukārt, katra no šīm daļām var sastāvēt no vairākiem elementiem, piemēram, līdzstrāvas mašīnas stators no poliem un statnes. Noteiktos gadījumos magnētiskās sistēmas daļas, kas konstruktīvi veido vienu veselumu, var tikt uzskatītas kā sastāvošas no atsevišķiem funkcionālā ziņā dažādiem elementiem. Tādas daļas, piemēram, ir transformatora magnētvara stieņi (magnētvara daļas, uz kurām novietotas tinuma spoles), un jūgi (magnētvara daļas, kas savieno stieņus, veidojot noslēgtu magnētisko ķēdi).

No funkcionālā viedokļa magnētiskās ķēdes atsevišķās daļas nosacīti var iedalīt aktīvajās un neaktīvajās daļās. Aktīvās daļas ir tās daļas, uz kurām novietotas tinumu spoles, bet neaktīvās daļas ir tās, uz kurām šādu spoļu nav. Tā, piemēram, līdzstrāvas mašīnu un sinhronmašīnu poli un transformatora magnētserdes stieņi šajā nozīmē ir aktīvās daļas, bet līdzstrāvas mašīnu vai sinhronmašīnu statora jūgi, kā arī transformatora magnētserdes jūgi ir neaktīvās daļas.

Tinumu spoles, kas paredzētas magnētiskā lauka radīšanai (kaut gan šīs spoles nav magnētvara daļas), magnētisko sistēmu optimizācijas uzdevumos jāaplūko kopsaistībā ar magnētiskās ķēdes feromagnētiskajiem elementiem, jo spoļu izmēri ir atkarīgi no serdes izmēriem un otrādi. Tā, piemēram, līdzstrāvas mašīnas polu serdes šķērsriezuma laukuma samazināšana ļauj samazināt ierosmes tinuma spoļu izmērus, bet, no otras puses, ar to saistītā magnētiskās indukcijas palielināšanās rada nepieciešamību palielināt ierosmes tinuma magnetizētājspēku, kas, savukārt, palielina spoļu izmērus. Turklāt spoļu izmēru palielināšanās to vai citu iemeslu dēļ izraisa atbilstošu magnētserdes neaktīvo daļu izmēru palielināšanos.

2. Magnētisko sistēmu izvēles vispārīgi kritēriji

Magnētisko sistēmu racionāla un optimāla izveidošana ir atkarīga no vairākiem faktoriem, kas raksturo elektromagnētiskās ierīces darbību. Ievērojot šos faktorus, var formulēt virkni vispārīga rakstura kritērijus, pēc kuriem būtu jāvadās izvēloties un projektējot dažādas magnētiskās sistēmas. Galvenie no šiem kritērijiem ir:

- a) elektromagnētiskie raksturlielumi;
- b) termiskie raksturlielumi;
- c) izgatavošanas tehnoloģija;
- d) izmēri un masa;
- e) materiālu, izgatavošanas un ekspluatācijas izmaksas.

Nodrošināt magnētiskās sistēmas vislabvēlīgākos elektromagnētiskos raksturlielumus nozīmē izveidot magnētisko sistēmu tā, lai būtu iespējami mazāka izkliedes plūsma un mazāks magnētiskās plūsmas ceļa garums.

Termiskie raksturlielumi, galvenokārt ir saistīti ar tinumu un daļēji arī magnētserdes dzesējošās virsmas palielināšanu, kas nodrošinātu nepieciešamu siltuma atdevi apkārtējai videi. No šī viedokļa atsevišķos gadījumos tinumu lietderīgi izveidot no vairākām spolēm, kas, savukārt, ietekmē magnētserdes konstrukciju, formu un ģeometriskos izmērus.

Ļoti būtisks faktors, kas ietekmē magnētiskās sistēmas izvēli, ir izgatavošanas tehnoloģija. Lietderīgi izmantot tādas progresīvas tehnoloģijas, kuras izgatavošanas procesu ļauj maksimāli mehanizēt un automatizēt, piemēram, štancēšanu (magnētserdi saliek no štancētiem elektrotehniskā tērauda skārdiem), kas ļauj bez grūtībām izveidot jebkuras formas magnēt vadu. Arī metālkemikas tehnoloģija magnēt vadu un to elementu izgatavošanā ir progresīva tehnoloģija, kas turklāt nodrošina bezatkritumu ražošanu. Daudz mazāk progresīva ir tehnoloģija, kurā magnētseržu izgatavošanā izmanto liešanas operācijas. Magnētiskās sistēmas izvēle saistībā ar tehnoloģiju ir atkarīga arī no ražošanas tipa (individuāla, mazsēriju, lielsēriju ražošana). Lielsēriju ražošanā ievērojama loma ir tieši magnētiskās sistēmas un attiecīgi ierīces kopējo izmaksu tai daļai, ko nosaka ražošanas izmaksas. Tādēļ svarīgi ir maksimāli unificēt magnētiskās sistēmas atsevišķus elementus, lai samazinātu šo elementu daudzveidību un tādējādi samazinātu kopējās ražošanas izmaksas.

Izvēloties magnētisko sistēmu, jātiecas uz to, lai tās izmēri un masa būtu iespējami mazāki, jo tad samazinās arī materiālu patēriņš un to izmaksas.

Viens no svarīgākajiem kritērijiem magnētiskās sistēmas izvēlē ir kopējās izmaksas A , kas veidojas no materiālu izmaksām A_{mat} , ražošanas izmaksām $A_{\text{raž}}$ un ekspluatācijas izmaksām A_{ekspl} :

$$A = A_{\text{mat}} + A_{\text{raž}} + A_{\text{ekspl}}, \quad (1)$$

turklāt ekspluatācijas izmaksas galvenokārt nosaka enerģijas zudumi ierīcē. Šo kopējo izmaksu minimizācija parasti arī ir optimizācijas galvenais uzdevums.

Plašākā nozīmē izteiksme (1) ir attiecināma uz visas iekārtas izmaksām, kuru noteiktu daļu sastāda magnētiskās sistēmas izmaksas. Atsevišķos gadījumos optimizācijas uzdevumu var aplūkot arī šaurākā nozīmē, t. i., kā kopējo izmaksu atsevišķu sastāvdaļu minimizāciju.

Nobeigumā var atzīmēt, ka šeit aplūkotie magnētisko sistēmu izvēles vispārīgie kritēriji parasti ir pretrunīgi tādā nozīmē, ka kaut kāda magnētiskās sistēmas raksturlieluma uzlabošana ir saistīta ar citu raksturlielumu pasliktināšanos. Piemēram, lai nodrošinātu labāku siltuma atdevi, jāpalielina tinuma spoļu virsmas laukums, bet tas, savukārt, saistīts ar izmēru un masas palielināšanos. No otras puses, samazinot magnētserdes šķērsriezuma laukumu, palielinās elektromagnētiskās noslodzes (magnētiskā indukcija serdē, strāvas blīvums tinumā), kas, savukārt, palielina ierīces zudumus un tātad ekspluatācijas izdevumus.

3. Optimizācijas metodoloģiskie pamati

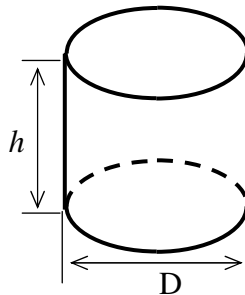
Optimizācija ir dažādu tehnisku un matemātisku problēmu labākā atrisinājuma meklēšanas metodes un procedūras. Tā ietver matemātiskos rezultātus un skaitliskās metodes, kas orientētas uz vislabākā varianta atrašanu un identifikāciju alternatīvu daudzveidībā. Optimizācijas process ir visas inženierdarbības pamatā, jo klasiskās inženieru funkcijas ir projektēt jaunas efektīvākas un lētākas tehniskās sistēmas un ierīces un izstrādāt pastāvošo sistēmu funkcionēšanas kvalitātes paaugstināšanas metodes. Optimizācijas metodes ļauj izvēlēties vislabāko variantu bez tiešas liela skaita visu iespējamo variantu pārbaudes un novērtēšanas. Tās ir cieši saistītas ar matemātisku metožu, loģisku procedūru un algoritmu izmantošanu, realizējot tos ar datortehnikas līdzekļiem.

Jebkuras optimizācijas pamatuzdevums ir noteikt ierīces vai procesa parametrus, kuri, vadoties no iepriekš pieņemtiem kritērijiem, nodrošina vislabākos funkcionēšanas apstākļus.

Praksē sastopamie optimizācijas uzdevumi parasti ir saistīti ar ierīces vai procesa optimizāciju. Pirmajā gadījumā optimizācijas uzdevums reducējas uz tādu ierīces parametru (ģeometrisko izmēru, elektrisko un magnētisko raksturlielumu u. tml.) izvēli, kas nodrošinātu kaut kāda šīs ierīces raksturlieluma vislielāko vai vismazāko vērtību, piemēram, minimālo masu, maksimālo jaudu u. tml. Otrajā gadījumā optimizācijas uzdevums ir noskaidrot procesa norises vislabvēlīgākos apstākļus, piemēram, noteikt strāvu vai jaudu, ar kuru slogojot ierīci, tai būtu visaugstākais lietderības koeficients.

Aplūkosim dažus vienkāršus optimizācijas piemērus.

1. piemērs. No skārda jāizgatavo noteikta tilpuma V cilindriskas formas trauks. Noteiksim, kādam jābūt šī trauka augstumam h un diametram D (1. att.), lai tā izgatavošanai būtu vismazākais materiāla patēriņš.



1. attēls. Cilindriska trauka optimālo izmēru noteikšana

Trauка tilpums

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h \quad (2)$$

un tā virsmas laukums, kas nosaka materiāla patēriņu,

$$S = \frac{\pi}{2} D^2 + \pi D h. \quad (3)$$

No (2) izsakot $h = \frac{4V}{\pi D^2}$ un ievietojot izteiksmē (3), iegūstam funkcionālu sakarību $S = f(D)$:

$$S = \frac{\pi}{2} D^2 + \frac{4V}{D}. \quad (4)$$

Lai atrastu S minimālo vērtību, izteiksme (4) jāatvasina pēc D un jāpielīdzina nullei:

$$\frac{dS}{dD} = \pi D - \frac{4V}{D^2} = 0, \quad (5)$$

no kurienes var atrast, ka

$$D^3 = \frac{4V}{\pi}, \quad (6)$$

jeb, ievietojot šajā izteiksmē V no (2), pēc pārveidojumiem iegūstam

$$D = l = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}. \quad (7)$$

Tādējādi minimālais materiāla patēriņš ir tad, ja trauka augstums h un diametrs D ir vienādi.

2. piemērs. Jānosaka transformatora slodzes strāva, kura nodrošina visekonomiskāko darba režīmu, t. i., visaugstāko lietderības koeficientu η . Transformatora lietderības koeficientu var izteikt kā atdotās P_2 un patērētās P_1 jaudas attiecību:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (8)$$

jeb

$$\eta = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = 1 - \frac{\Delta P}{P_1}, \quad (9)$$

kur ΔP – transformatora jaudas zudumi.

Kā zināms [1], transformatora jaudas zudumi sastāv no tukšgaitas zudumiem P_0 (nemainīgie jeb magnētiskie zudumi) un īsslēguma zudumiem P_k (mainīgie jeb elektriskie zudumi):

$$\Delta P = P_0 + P_k = P_0 + I^2 P_{kN}, \quad (10)$$

kur $I = \frac{I_2}{I_{2N}}$ – transformatora slodzes strāva relatīvajās vienībās, t. i., attiecināta pret nominālo slodzes strāvu; P_{kN} – īsslēguma zudumi, kas atbilst nominālajai strāvai.

Transformatora sekundārā tinuma atdotā jauda

$$P_2 = m I_2 U_{2N} \cos \varphi_2 = I m I_{2N} U_{2N} \cos \varphi_2 = I S_N \cos \varphi_2, \quad (11)$$

kur m – fāžu skaits; S_N – transformatora nominālā jauda.

Ievietojot izteiksmē (9) sakarības (10) un (11), iegūstam

$$\eta = 1 - \frac{P_0 + I^2 P_{kN}}{I S_N \cos \varphi_2 + P_0 + I^2 P_{kN}}. \quad (12)$$

Funkcijas $\eta = f(I)$ atvasinājumu pielīdzinot nullei un atrisinot iegūto vienādojumu, var atrast, ka

$$P_0 = I^2 P_{kN}, \quad (13)$$

no kurienes optimālā slodzes strāva

$$I = I_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{kN}}}. \quad (14)$$

Var atzīmēt, ka lielumi P_0 un P_{kN} ir atrodami no transformatora pases datiem.

4. Optimizācijas uzdevuma nostādne

Lai izmantotu optimizācijas teorijas matemātiskos rezultātus un skaitliskās metodes konkrētu inženiertehnisku uzdevumu risināšanai, iepriekš jāveic noteiktas secīgas darbības, kas būtībā ir optimizācijas uzdevuma nostādne. Optimizācijas uzdevuma nostādne ietver nepieciešamo nosacījumu formulēšanu un realizāciju optimizācijas uzdevuma sagatavošanas procesā. Lai veiktu optimizāciju, ir nepieciešams:

- noteikt optimizācijai paredzētās sistēmas robežas;
- noteikt kvantitatīvo kritēriju (raksturkritēriju), uz kura pamata var veikt alternatīvo variantu analīzi, lai noskaidrotu vislabāko no tiem;
- izvēlēties iekšsistēmas mainīgos, kuri tiks izmantoti, lai noteiktu variantu raksturlielumus un veiktu to identifikāciju;
- izveidot matemātisko modeli, kas atspoguļo sakarības starp mainīgajiem.

Šo darbību secība veido optimizācijas uzdevuma saturu. Optimizācijas uzdevuma korekta nostādne ir pamats pētījuma panākumam un vairāk asociējas ar mākslu, nekā ar eksaktām zinātnēm. Uzdevuma nostādnes prasme veidojas praktiskajā darbībā un uz veiksmīgi īstenotu izstrādājumu piemēriem, kā arī pamatojas uz precīzu prioritāšu izpratni un noteikšanu.

Aplūkosim augstāk minēto darbību saturu un būtību sīkāk.

Optimizējamās sistēmas robežu noteikšana. Pirms sākt optimizāciju, nepieciešams precīzi noteikt pētāmās sistēmas robežas. Šajā kontekstā pētāmā sistēma tiek aplūkota kā apakšsistēma, t. i., kā citas lielākas ārējas sistēmas izolēta daļa. Veicot uzdevuma analīzi, tiek pieņemts, ka savstarpējās sakarības starp pētāmo sistēmu un ārējo sistēmu ir fiksētas kaut kādā izvēlēto priekšstatu līmenī. Tā, piemēram, optimizējot līdzstrāvas mašīnas induktora magnētisko sistēmu, to uzskata par apakšsistēmu, kuras ārējā sistēma (austāka līmeņa sistēma) ir visa mašīna kopumā ar iepriekš noteiktiem un zināmiem enkura galvenajiem izmēriem (diametru, garumu, gaisa spraugas platumu). Dažos gadījumos var izrādīties, ka sistēmas robežu sākotnējā robeža ir pārāk stingra. Tādēļ, lai pilnībā veiktu pētāmās sistēmas analīzi, var rasties nepieciešamība paplašināt šīs noteiktās robežas, ieslēdzot citu apakšsistēmu, kas būtiski ietekmē pētāmās sistēmas funkcionēšanu. Protams, sistēmas robežu paplašināšana palielina šīs daudzkomponenšu sistēmas apjomu, padara to sarežģītāku un tādēļ apgrūtinā analīzi. Acīmredzot, katrā konkrētā gadījumā, cik vien tas iespējams, jācenšas sarežģītas sistēmas sadalīt nosacīti nelielās apakšsistēmās, kuras var pētīt atsevišķi. Tomēr tādā gadījumā jābūt pilnīgai pārliecībai, ka šāda dekompozīcija nenoved pie reālās situācijas pārmērīgas vienkāršošanas.

Raksturkritērija noteikšana. Pēc optimizējamās sistēmas robežu noteikšanas ir jāizvēlas kvantitatīvais kritērijs, pēc kura var vērtēt sistēmas raksturlielumus, lai noskaidrotu labāko variantu vai vislabākos sistēmas funkcionēšanas apstākļus. Inženiertehniskos uzdevumos parasti izvēlas ekonomiska rakstura kritērijus. Tomēr šādu kritēriju iespējamā formulējuma spektrs ir diezgan plašs, piemēram, masa, gabarīti, materiālu izmaksas, zudumi, lietderības koeficients. Citos gadījumos par pamatu kritērija izvēlei var ņemt tehnoloģiskos faktoros vai arī dažādus tehniskos parametrus, piemēram, griezes momentu, patērēto jaudu, sasiluma temperatūru u. tml. Neatkarīgi no tā, kādu kritēriju izvēlas optimizācijā, vislabākajam variantam vienmēr jāatbilst šī izvēlētais kritērija minimālajai vai maksimālajai vērtībai. Svarīgi atzīmēt, ka, nosakot optimumu, var izmantot tikai vienu kritēriju, jo nav iespējams iegūt risinājumu, kas, piemēram, vienlaikus nodrošinātu ierīces minimālo masu un minimālos enerģijas zudumus. Šeit atkal sastopamies ar reālās situācijas būtisku

vienkāršošanu, jo daudzos praktiskos gadījumos būtu ļoti vēlams rast risinājumu, kas izrādītos vislabākais no vairāku un dažādu kritēriju viedokļa. Tomēr pastāv iespējas daļēji šo pretrunu atrisināt. Viena no šādām iespējām ir tāda, ka kādu no kritērijiem izvēlas par primāro, bet pārējos uzskata par sekundāriem. Šajā gadījumā optimizācijas primāro kritēriju izvēlas sistēmas funkcionēšanas novērtēšanai, bet sekundārie kritēriji rada optimizācijas uzdevuma ierobežojumus, kas nosaka attiecīgo raksturlielumu izmaiņu diapazonu no minimālās līdz maksimālajai pieļaujamai vērtībai. Otra iespēja ir ieviest kompleksos vai relatīvos kritērijus, kuri ļauj novērtēt sistēmas optimumu vienlaikus no vairākiem viedokļiem. Piemēram, ja nepieciešams, lai ierīce attīstītu iespējami lielāku jaudu un vienlaikus tai būtu iespējami mazāka masa, par kritēriju var izvēlēties jaudu uz masas vienību.

Optimizējamās sistēmas mainīgo izvēle. Optimizācijas uzdevuma nostādnes trešajā posmā ir jāveic mainīgo izvēle, ar kuriem adekvāti var aprakstīt ierīces pieļaujamus variantus vai sistēmas funkcionēšanas apstākļus. Vispārīgā gadījumā var būt liels skaits šo mainīgo un tie var būt ļoti daudzveidīgi, piemēram, ierīces ģeometriskie izmēri, materiālu īpašību raksturojumi (fizikālas konstantes, raksturlieknes u. c. parametri), elektromagnētiskās noslodzes (magnētiskā indukcija, strāvas blīvums), dažādi ierīci raksturojoši fizikālie lielumi (spriegums, strāva, pretestība, magnētiskā plūsma, rotācijas frekvence), elektromagnētisko ierīču specifiski konstruktīvie parametri (tinuma vijumu skaits, tinuma solis, polu skaits). Svarīgi atzīmēt, ka visiem mainīgajiem, ar kuriem tiek aprakstīti sistēmas funkcionēšanas apstākļi, ir jābūt savstarpēji neatkarīgiem. Aplūkosim, piemēram, izteiksmi, kas raksturo līdzstrāvas dzinēja rotācijas frekvences n atkarību no enkura sprieguma U , enkura ķēdes pretestības R_a un magnētiskās plūsmas Φ :

$$n = \frac{U - I_a R_a}{c_E \Phi}, \quad (15)$$

kur I_a – enkura strāva; c_E – koeficients, kas atkarīgs no polu skaita un enkura tinuma paralēlo zaru skaita.

Šīs izteiksmes labajā pusē trīs lielumi U , R_a un Φ ir savstarpēji neatkarīgi lielumi, kurus mainot, var regulēt dzinēja rotācijas frekvenci, ja dzinējs darbojas ar nemainīgu slodzes momentu M . Turpretim enkura strāva I_a , ja $M = \text{const}$, mainās, regulējot, piemēram, magnētisko plūsmu Φ un tādēļ to nevar uzskatīt par neatkarīgu mainīgo. Tas izriet no izteiksmes

$$M = c_M I_a \Phi, \quad (16)$$

kur c_M – koeficients, kas atkarīgs no polu skaita un enkura tinuma paralēlo zaru skaita.

Neatkarīgo mainīgo izvēlē jāievēro vairāki svarīgi apstākļi.

Pirmkārt, jānoskaidro atšķirība starp dažādiem mainīgajiem, kuru vērtības var mainīties plašā diapazonā, un mainīgajiem, kuru vērtības ir fiksētas un noteiktas ar ārējiem apstākļiem. Tālāk ir svarīgi noteikt atšķirības starp tiem sistēmas mainīgajiem, kuru vērtības var uzskatīt par nemainīgām, un tādiem parametriem, kuru vērtības var mainīties ārēju un atsevišķos gadījumos nekontrolējamu faktoru ietekmē.

Otrkārt uzdevuma nostādnē jāfiksē visi galvenie mainīgie, kas ietekmē ierīces raksturlielumus vai sistēmas funkcionēšanu. Par neatkarīgiem mainīgajiem jāizvēlas

tādi mainīgie, lai svarīgākie tehniski ekonomiskie risinājumi atspoguļotos uzdevuma formulējumā.

Treškārt, būtisks faktors, kas ietekmē mainīgo izvēli ir detalizācijas līmenis sistēmas izpētē. Ļoti svarīgi ir izskatīt visus neatkarīgos mainīgos, bet arī ne mazāk svarīgi ir nepārslogot uzdevumu ar liela skaita nebūtiskām detaļām. Izvēloties neatkarīgos mainīgos, lietderīgi izskatīt tikai tos mainīgos, kuri būtiski ietekmē sistēmas analīzei izvēlētos raksturkritērijus.

Sistēmas matemātiskā modeļa izveide. Pēdējais posms optimizācijas uzdevuma nostādņē ir sistēmas matemātiskā modeļa konstruēšana. Šim modelim ir jāatspoguļo mijsaikarības starp neatkarīgajiem mainīgajiem un mainīgo ietekme uz mērķa sasniegšanas pakāpi, ko nosaka optimizācijas raksturkritērijs. Principā optimizāciju var veikt, eksperimentējot ar sistēmu tieši. Šim nolūkam nepieciešams fiksēt dažādas mainīgo vērtības, veikt sistēmas funkcionēšanas novērojumus un, reģistrējot sistēmas raksturojumus, novērtēt raksturkritērija vērtības. Pēc tam, izmantojot optimizācijas metodes, var izdarīt šo mainīgo korekciju un turpināt eksperimentu sēriju. Tomēr praksē optimizācijas pētījumus parasti veic, izmantojot vienkāršotus priekšstatus par sistēmu, t. i., aprakstot šo sistēmu ar tuvinātām matemātiskām saikārbām. Tas nozīmē, ka reālas sistēmas vietā analīzei tiek pakļauts tās matemātiskais modelis, kas iegūts, izdarot virkni pieņēmumu un vienkāršošanu. Modeļa izmantošanu attaisno tas apstākļi, ka eksperimentiem ar reālām sistēmām parasti nepieciešams liels līdzekļu un laika patēriņš. Vispārīgā gadījumā modeļa struktūra ietver ierīci vai procesu aprakstošos pamatvienādojumus. Tā, piemēram, risinot magnētisko sistēmu optimizācijas uzdevumus, matemātiskā modeļa veidošanai var izmantot elektromagnētiskā lauka jeb Maksvela vienādojumus [2] vai magnētisko ķēžu teorijas pamatsaikarības. Pēdējā gadījumā modelis ir vienkāršāks un līdz ar to ir vienkāršāks viss optimizācijā izmantojamais matemātiskais aparāts. Jebkurā gadījumā modelim jāsaturs visa informācija, ko izmanto ierīces vai procesa aprēķinos vai sistēmas raksturlīkņu prognozēšanā. Matemātiskā modeļa izveide bieži vien ir diegan darbietilpīgs un vienlaikus ļoti atbildīgs process, kurā nepieciešama izvērtējamās sistēmas specifisko īpatnību precīza fizikālā izpratne.

5. Optimizācijas uzdevumu struktūra

Neraugoties uz to, ka optimizācijas uzdevumi attiecas uz ļoti daudzām un dažādām inženiertehniskajām nozarēm, tiem ir kopīga vispārējā struktūra. Visus šos uzdevumus var klasificēt kā vektoriāla N dimensionāla argumenta $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$ funkcijas $f(\bar{x})$ minimizācijas uzdevumus. Turklāt vektora \bar{x} komponentes apmierina vienādojumu sistēmu

$$u_k(\bar{x}) = 0,$$

nevienādību sistēmu

$$v_j(\bar{x}) > 0,$$

kā arī šīs komponentes ir ierobežotas ar apakšējo $x_{i\min}$ un augšējo $x_{i\max}$ robežu, t. i.,

$$x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}.$$

Funkciju $f(\bar{x})$ optimizācijas teorijā sauc par mērķfunkciju.

Vispārīgā gadījumā optimizācijas uzdevumu var formulēt šādi: minimizēt funkciju $f(\bar{x})$, ja ir spēkā ierobežojumi

$$u_k(\bar{x}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (17)$$

$$v_j(\bar{x}) > 0 \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (18)$$

$$x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max} \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (19)$$

Šādu uzdevumu sauc par nosacītās optimizācijas uzdevumu. Ja uzdevums nesatur ierobežojumus, t. i., $K = J = 0$ un $-\infty \leq x_i \leq +\infty$, tad to sauc par beznosacījumu optimizācijas uzdevumu.

Piemēram, var būt šāda optimizācijas uzdevuma struktūra: minimizēt trīs argumentu ($N = 3$) mērķfunkciju

$$f(\bar{x}) = x_1 x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 + \frac{x_1}{x_2 + x_3}$$

ar diviem ierobežojumiem ($K = 2$), kas izteikti ar vienādojumiem

$$u_1(\bar{x}) = x_1 x_2 - A = 0,$$

$$u_2(\bar{x}) = x_1 + 2x_3 - B = 0,$$

trīs ierobežojumiem ($J = 3$), kas izteikti ar nevienādībām

$$v_1(\bar{x}) = x_1 + x_2 > 0,$$

$$v_2(\bar{x}) = x_2 + x_3 > 0,$$

$$v_3(\bar{x}) = x_1 + x_3 > 0$$

un argumentu x_1, x_2 un x_3 apakšējām un augšējām robežām, kas izteiktas kā

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1,$$

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2,$$

$$a_3 \leq x_3 \leq b_3.$$

6. Viendimensijas optimizācijas uzdevumi

6.1. Viena argumenta funkcijas īpašības

Optimizācijas uzdevumi, kuros optimālītātes raksturkritērijs izteikts ar viena argumenta funkciju (viendimensijas optimizācijas uzdevumi), pieskaitāmi vienkāršākā tipa uzdevumiem. Tomēr šādu uzdevumu analīze optimizācijas pētījumos ieņem svarīgu vietu gan teorētiskajā, gan praktiskajā ziņā. Tas saistīts ar to, ka tieši šādi uzdevumi ļoti bieži risināmi praksē, kā arī ar to, ka viendimensijas optimizācijas metodes bieži lieto analizējot apakšuzdevumus, kuri rodas vairākdimensijas uzdevumu risināšanas iteratīvās procedūrās. Teorētisko un praktisko viendimensijas

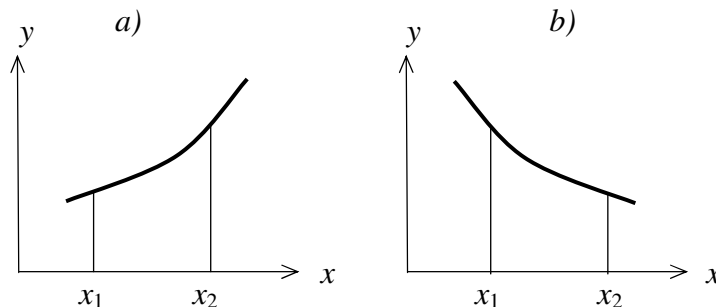
optimizācijas uzdevumu svarīgums ir veicinājis liela skaita algoritmu izstrādi šādu uzdevumu risināšanai.

Viendimensijas optimizācijas uzdevumu risināšanas metožu klasifikācija balstās uz dažādām viena argumenta funkcijas īpašībām.

Saskaņā ar definīciju funkcija $f(x)$ izsaka likumu, kas ļauj katrai x vērtībai atrast $y = f(x)$ vērtību. Šajā gadījumā x ir neatkarīgais mainīgais, bet y – atkarīgais mainīgais. Funkcija $f(x)$ var būt definēta ierobežotā vai neierobežotā apgabalā. Lielu daļu fizikālu procesu var aprakstīt ar nepārtrauktu funkciju palīdzību. Tomēr inženiertehnisku uzdevumu risināšanas praksē sastopami arī gadījumi, kad procesu aprakstīšanai jālieto pārtrauktas funkcijas. Ne vienmēr ir nepieciešams, lai neatkarīgā mainīgā pieļaujamo vērtību intervāls saturētu visus reālos skaitļus šajā intervālā. Iespējami gadījumi, kad mainīgai var pieņemt tikai diskretas vērtības, piemēram, elektromašīnu polu skaits, statora vai rotora zobu skaitu. tml.

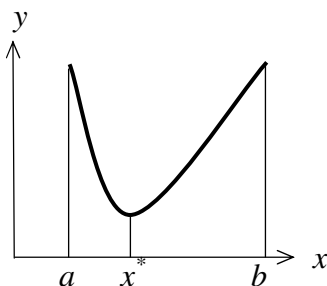
Funkciju $f(x)$ sauc par monotonu, ja diviem patvaļīgiem punktiem x_1 un x_2 , tādiem, ka $x_1 < x_2$ izpildās viena no šādām nevienādībām (sk. 2. att):

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (monotoni augoša funkcija),}$$
$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (monotoni dilstoša funkcija).}$$



2. attēls. Monotona funkcija: a) monotoni augoša; b) monotoni dilstoša

Funkcija $f(x)$, kas sasniedz savu minimumu punktā $x = x^*$ un kura ir monotona uz abām pusēm no minimuma punkta, sauc par unimodālu funkciju (3. att.).



3. attēls. Unimodāla funkcija

Funkcija $f(x)$ intervālā $[a; b]$ ir unimodāla vienīgi tajā gadījumā, ja x^* ir vienīgais minimuma punkts šajā intervālā, t. i., ja izpildās šādi nosacījumi:

$$x^* < x_1 < x_2, f(x^*) < f(x_1) < f(x_2)$$

un

$$x^* > x_1 > x_2, f(x^*) < f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcijas unimodalitāte ir ļoti svarīga tās īpašība un to plaši izmanto optimizācijas teorijā.

6.2. Optimalitātes kritēriji

Analizējot optimizācijas uzdevumus, parasti rodas divi vispārēja rakstura jautājumi:

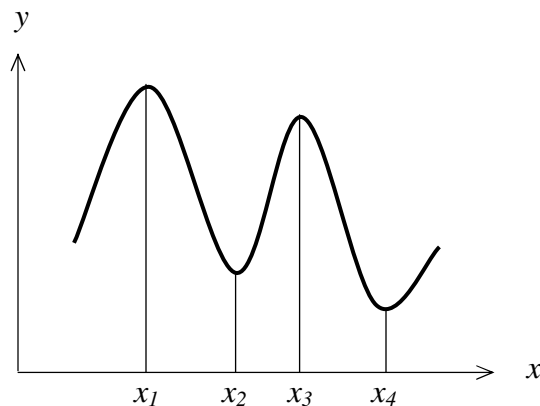
- kā noteikt, vai kaut kāds izvēlētais punkts x ir uzdevuma optimālais risinājums, t. i., $x = x^*$;
- kādas darbības jāveic, lai atrastu optimuma punktu x^* , ja izvēlētais punkts x nav šis optimuma punkts.

Vispārīgā gadījumā funkcijai $f(x)$ var būt globālie minimumi (vai maksimumi) un lokālie minimumi (vai maksimumi). Apgabalā A definētai funkcijai $f(x)$ ir globālais minimums punktā x^{**} , ja visiem $x \in A$ izpildās nosacījums

$$f(x^{**}) \leq f(x).$$

Apgabalā A definētai funkcijai $f(x)$ ir lokālais minimums (nosacītais minimums) punktā x^* , ja visiem $x \in A$, kas atrodas no x^* pietiekami mazā attālumā ε ($|x - x^*| < \varepsilon$) izpildās nosacījums

$$f(x^*) < f(x).$$



4. attēls. Multimodālas funkcijas lokālie un globālie ekstrēmi

Globālā maksimuma un lokālā maksimuma definīciju var iegūt, mainot minētajos nosacījumos nevienādības zīmes uz pretējām. Ja funkcija ir unimodāla, tad lokālais minimums vienlaikus ir arī globālais minimums. Ja funkcija ir multimodāla, tad iespējami vairāki lokālie minimumi (maksimumi), turklāt globālo minimumu var noteikt, atrodot visus lokālos minimumus un izvēloties mazāko no tiem. Pēc līdzīga principa nosaka globālo maksimumu – atrod visus lokālos maksimumus un izvēlas

lielāko no tiem. 4. attēlā parādītajā funkcijas grafikā punkti x_1, x_2, x_3 un x_4 attiecīgi ir globālā maksimuma, lokālā minimuma, lokālā maksimuma un globālā minimuma punkti.

Nepieciešamo nosacījumu lokālā minimuma vai maksimuma esībai var izteikt kā

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0. \quad (20)$$

6.3. Viena argumenta funkcijas minimizācijas metožu vispārīgs raksturojums

Visas optimālā risinājuma meklēšanas metodes nosacīti var iedalīt divās grupās:

- 1) metodes, kuras balstās uz vairākkārtēju funkcijas vērtību izskaitļošanu pēc noteiktos sistēmas izvēlētos meklēšanas punktos;
- 2) metodes, kurās izmanto funkcijas atvasinājumu.

No algoritma viedokļa vienkāršākas ir pirmās grupas metodes, taču parasti to izmantošana ir saistīta ar lēnu konvergenci un tātad ar risināšanas laika palielināšanos. Otrās grupas metodēs par pamatu ņem izteiksmi (20), saskaņā ar kuru vispirms atrod funkcijas pirmo atvasinājumu $F(x) = f'(x)$ un pēc tam, atrisinot vienādojumu

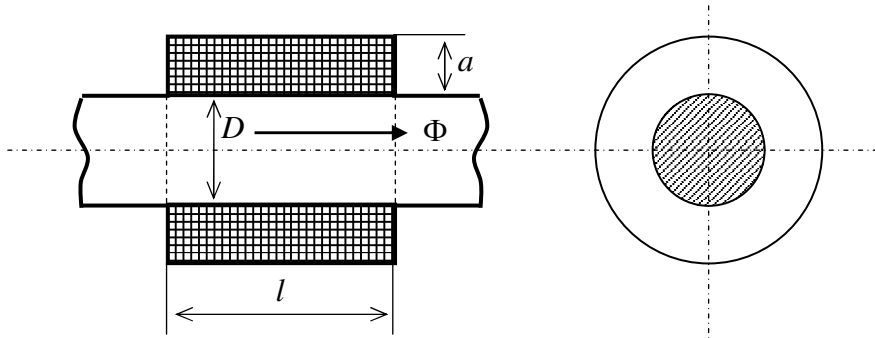
$$F(x^*) = 0, \quad (21)$$

atrod optimālo vērtību x^* .

Tomēr daudzos praktiskos uzdevumos vienādojums (21) ir nelineārs vienādojums, tāpēc nevar iegūt tā analītisku atrisinājumu, bet jāizmanto dažādas tuvinātas skaitliskās metodes [3]. Turklāt mērķfunkcija $f(x)$ var būt uzdota netiešā vai parametriskā formā, vai kā funkcionālu sakarību virkne, kas sastāv no vairākām funkcijām ar savstarpēji atkarīgiem mainīgajiem, piemēram, $f(x, x_1, x_2)$, kur $x_1 = f_1(x_1, x_2)$, $x_2 = f_2(x, x_1)$. Risinot elektromagnētisku ierīču optimizācijas uzdevumus, minētājā funkcionālo sakarību virknē atsevišķas sakarības var būt uzdotas grafiski vai tabulas veidā, piemēram feromagnētisko materiālu magnetizēšanas līkne $B = f(H)$, un tādēļ funkcijas atvasinājumu analītiskā veidā nav iespējams atrast. Tad jāizmanto tāds vai citāds šādu funkciju aproksimēšanas veids, kas, savukārt, var ienest papildus kļūdas. Tāpat arī, ja atvasinājuma aproksimācijai izmanto procedūras ar galīgajām diferencēm, piemēram, Ņūtona interpolācijas polinomus, aktuāls kļūst jautājums par soļa izvēli saistībā ar aproksimācijas precizitāti. Līdz ar to izmantojamā metode katrā atsevišķā gadījumā pētniekam ir jāpielāgo risināmā uzdevuma konkrētam raksturam. Visas šīs minētās īpatnības, risinot reālus magnētisko sistēmu optimizācijas uzdevumus, rada būtiskus ierobežojumus to mērķfunkcijas minimizācijas metožu praktiskā lietošanā, kurās izmanto funkcijas atvasinājumu. Īpašu vietu metožu grupā ar atvasinājuma izmantošanu ieņem gradienta metode (sk. 6.6), kas ir viena no izplatītākajām mērķfunkcijas minimizācijas metodēm it īpaši vairāku argumentu funkciju gadījumā. Gradienta metodes galvenā priekšrocība ir tā, ka šī metode spēj nodrošināt ātru konvergenci un tādējādi būtiski samazināt uzdevuma risināšanas laiku.

Lai labāk izprastu iepriekš minētās problēmas, kas rodas ar atvasinājuma izmantošanu, analizēsim vienkāršu piemēru. Aplūkosim magnētiskās ķēdes elementu, ko veido cilindriskas formas magnētserde, un magnētisko lauku rada uz šīs serdes uztīta cilindriskā spole ar strāvu (5. att.). Pieņemsim, ka pārējā noslēgtās magnētiskās

ķēdes daļa ir izgatavota no materiāla, kura magnētiskā caurlaidība μ_2 ir daudzkārt lielāka par aplūkojamā elementa magnētisko caurlaidību μ_1 ($\mu_2 \gg \mu_1$) un tāpēc var pieņemt, ka $\mu_2 = \infty$. Tinumam jānodrošina noteikta lieluma magnētiskā plūsma Φ , turklāt optimizācijas gaitā jāatrod serdes diametra D vērtība, lai magnētserdes elementa tilpums V (šis tilpums sastāv no feromagnētiskās sedes tilpuma V_{Fe} un no spoles tilpuma V_{Cu}) būtu vismazākais, t. i., jāveic mērķfunkcijas $V = f(D)$ minimizācija.



5. attēls. Magnētvida elements ar tinumu

Magnētiskā indukcija serdē

$$B = \frac{4}{\pi D^2} \Phi. \quad (22)$$

Magnētserdes, spoles un visa elementa kopējo tilpumu var izteikt attiecīgi kā

$$V_{Fe} = \frac{\pi D^2}{4} l, \quad (23)$$

$$V_{Cu} = \left[\frac{\pi(D+2a)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4} \right] l = \pi a(a+D)l, \quad (24)$$

$$V = V_{Fe} + V_{Cu} = \frac{\pi(D+2a)^2}{4} l. \quad (25)$$

Serdes magnētiskās īpašības raksturo tās materiāla magnetizēšanas līkne, ko izsaka grafiski vai tabulas veidā uzdota nelineāra sakarība

$$H = f(B), \quad (26)$$

kur H – magnētiskā lauka intensitāte.

Spoles malas šķērsgriezuma laukums

$$S_{Cu} = a l. \quad (27)$$

Spoles biezums a nav neatkarīgs mainīgais, un to var izteikt, izmantojot pilnās strāvas likumu

$$Hl = iw, \quad (28)$$

kur i – strāva spolē; w – spoles vijumu skaits.

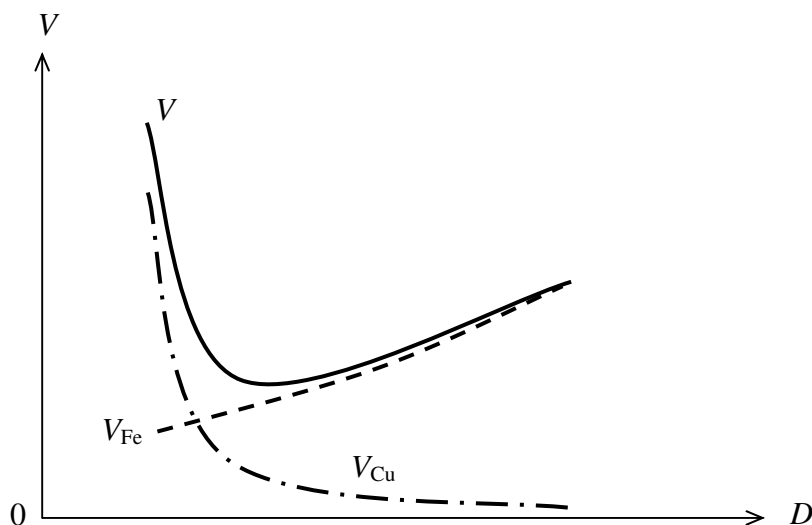
Vienkāršības dēļ pieņemot $w=1$ un strāvu i izsakot ar strāvas blīvumu j , no izteiksmēm (27) un (28) iegūstam

$$a = \frac{H}{j}. \quad (29)$$

Tad saskaņā ar (25)

$$V = \frac{\pi}{4} \left(D + \frac{2H}{j} \right)^2 l. \quad (30)$$

5. attēlā pārādīti mērķfunkcijas $V(D)$, kā arī tās sastāvdaļu $V_{Fe}(D)$ un $V_{Cu}(D)$ grafiki.



5. attēls. Mērķfunkcijas un tās sastāvdaļu izmaiņas līknes

No attēla redzams, ka palielinoties serdes diametram, tās tilpums palielinās. Savukārt palielinoties diametram, samazinās magnētiskā indukcija serdē un dotās magnētiskās plūsmas radīšanai vajadzīgs mazāks magnetizētājspēks, tāpēc spoles tilpums samazinās.

Kā redzams no izteiksmēm (30), (26) un (22), mērķfunkcija V ir uzdots ar funkcionālu sakarību virkni $V = f_1(D, H)$, $H = f_2(B)$ un $B = f_3(D)$, turklāt saliktu un apslēptu funkciju veidā. Šis apstāklis tad arī ir nopietns šķērslis, lai lieluma D optimālās vērtības atrašanai izteiksmi (20) varētu izmantot tiešā veidā, par ko var pārliecināties, izsakot funkcijas V atvasinājumu pēc D . No izteiksmes (30)

$$\frac{dV}{dD} = \frac{\pi}{2} l \left(D + \frac{2H}{j} \right) \frac{d}{dD} \left(D + \frac{2H}{j} \right). \quad (31)$$

Bet tā kā H apslēptā veidā ir atkarīgs no D , t. i. $H = f(D)$, tad

$$\frac{d}{dD} \left(D + \frac{2H}{j} \right) = 1 + \frac{2}{j} \frac{dH}{dD}. \quad (32)$$

Savukārt, saskaņā ar (22) un (26) funkcijas $H = f(D)$ kā saliktas funkcijas atvasinājums ir

$$\frac{dH}{dD} = -\frac{8\Phi}{\pi} \frac{1}{D^3} \frac{dH}{dB}. \quad (33)$$

Ievietojot $\frac{dH}{dD}$ no (33) izteiksmē (32) un pēc tam $\frac{d}{dD} \left(D + \frac{2H}{j} \right)$ no (32) izteiksmē (31), pēc pārveidojumiem iegūstam

$$\frac{dV}{dD} = \frac{\pi}{2} l \left(D + \frac{2H}{j} \right) \left(1 - \frac{16\Phi}{\pi j} \frac{1}{D^3} \frac{dH}{dB} \right). \quad (34)$$

Saskaņā ar (20), pielīdzinot šo izteiksmi nullei, iegūstam vienādojumu optimālā diametra D_{opt} noteikšanai:

$$\left(D_{\text{opt}} + \frac{2H}{j} \right) \left(1 - \frac{16\Phi}{\pi j} \frac{1}{D_{\text{opt}}^3} \frac{dH}{dB} \right) = 0. \quad (35)$$

Vienādojuma (35) risināšanas algoritms ir ļoti sarežģīts sakarā ar to, ka:

- tas ir nelineārs vienādojums;
- vienādojums satur apslēptā veidā uzdotu funkcionālo sakarību $H = f(D)$;
- tas satur nelineāru sakarību $H = f(B)$, kas uzdots grafiski vai tabulas veidā;
- satur atvasinājumu dH/dB ;
- nelineārās sakarības raksturs ir tāds, ka šīs sakarības aproksimēšanai ar pietiekamu precizitāti jāizmanto gabaliem paraboliska aproksimācija, kas, savukārt, rada nepieciešamību bez aritmētiskām operācijām skaitļošanas procesā izmantot arī loģiskās operācijas.

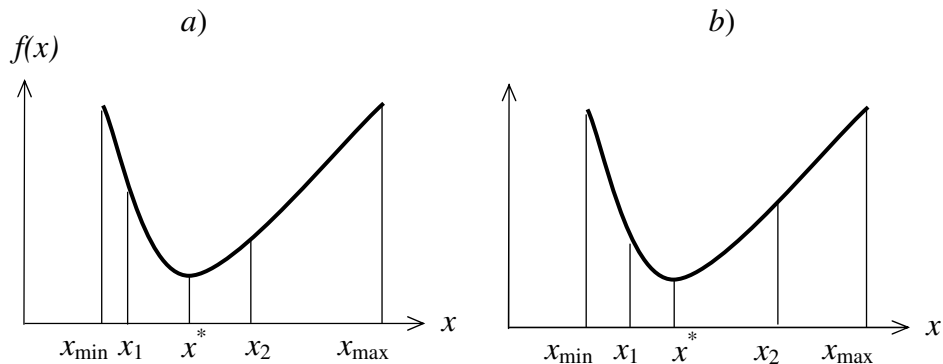
Minēto īpatnību dēļ metodes, kurās minimizācijai izmanto funkcijas atvasinājumu, magnētisko sistēmu optimizācijā vairumā gadījumu sevi neattaisno. Izņēmumi varētu būt nepiesātinātas magnētiskās sistēmas, kurā sakarība $B = f(H)$ ir praktiski lineāra, kā tas, piemēram, ir magnetizēšanas līknes sākuma daļā.

6.4. Viena argumenta funkcijas minimizācija ar intervālu izslēgšanas metodi

Mērķfunkcijas minimizācijas metode, ko sauc par intervālu izslēgšanas metodi, ir balstīta uz funkcijas vērtību izskaitļošanu pēc noteiktas sistēmas izvēlētos mēģinājuma punktos un šo vērtību salīdzināšanu. Šī metode ļauj ievērojami vienkāršot optimizācijas algoritmu, kurš zināmā mērā ir universāls tādā nozīmē, ka nav atkarīgs no minimizājamās funkcijas rakstura. Kā trūkumu intervālu izslēgšanas

metodei var minēt to, ka optimizācijas procesā var būt nepieciešams liels iterāciju skaits. Tomēr šis apstāklis, ja ievēro mūsdienu datortehnikas ātrdarbību, nav uzskatāms par būtisku trūkumu.

Intervālu izslēgšanas metodē tiek izmantota funkcijas unimodalitātes īpašība. Šī īpašība, salīdzinot funkcijas $f(x)$ vērtības divos dažādos meklēšanas intervāla punktos, ļauj noteikt, kurā no minēto punktu veidotajiem apakšintervāliem funkcijas minimuma punkts neatrodas. Intervālu izslēgšanas metodes pozitīvā īpašība ir tā, ka, lietojot šo metodi, nepieciešama tikai funkcijas vērtību izskaitļošana, turklāt nav nepieciešams, lai pētāmā funkcija būtu diferencējama, kā arī pieļaujami gadījumi, kad funkciju nevar uzdot analītiskā veidā. Vienīgā prasība ir funkcijas $f(x)$ vērtību izskaitļošanas iespējamība izvēlētajos meklēšanas punktos.



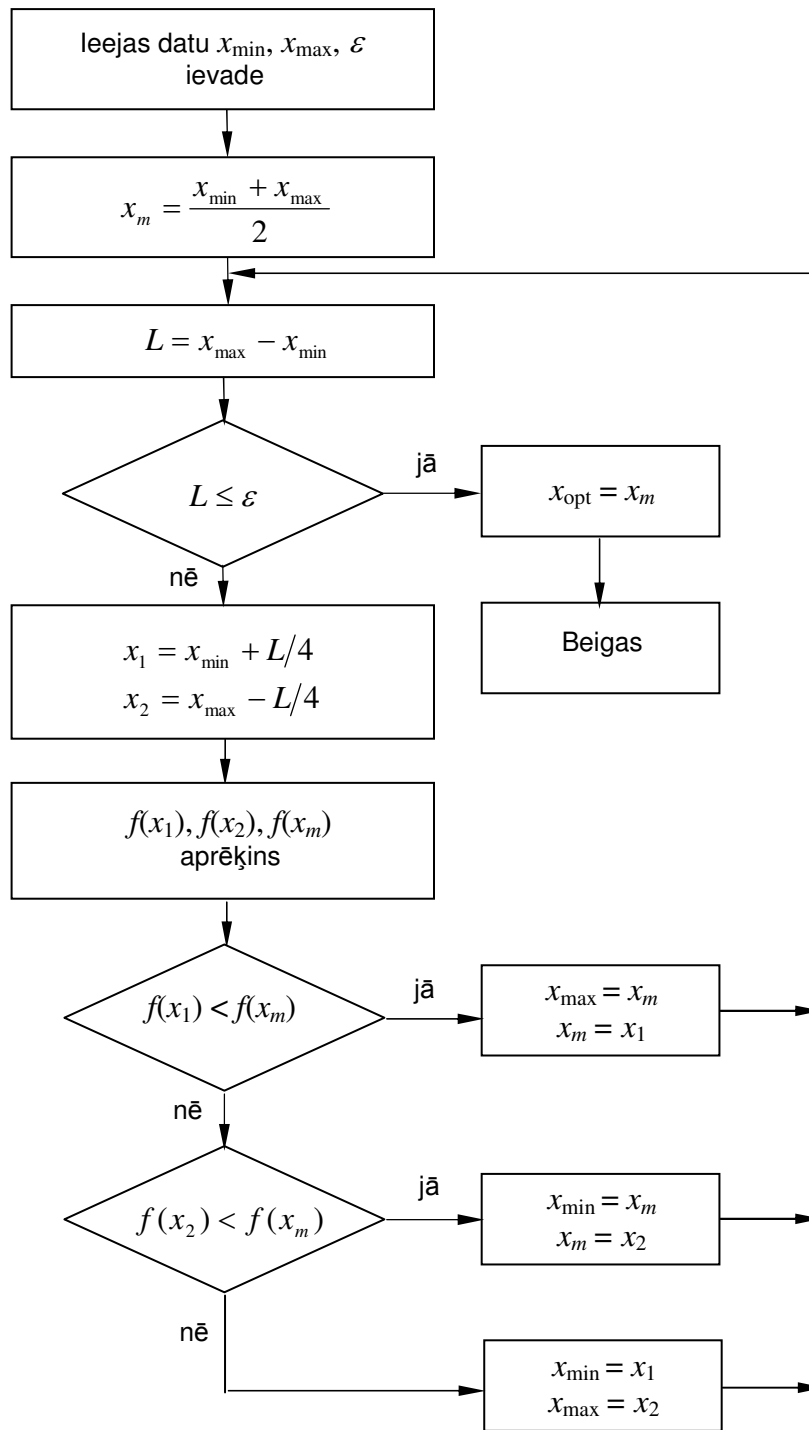
6. attēls. Intervālu izslēgšanas metodes grafiskā interpretācija

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir unimodāla intervālā $[x_{\min}; x_{\max}]$ un tās minimums ir punktā x^* (6. att.). Aplūkosim šajā intervālā punktus x_1 un x_2 , kuri izvēlēti tā, ka $x_{\min} < x_1 < x_2 < x_{\max}$. Salīdzinot funkcijas vērtības punktos x_1 un x_2 , iespējami šādi raksturīgi gadījumi:

- ja $f(x_1) > f(x_2)$ (6. att. a), tad minimuma punkts neatrodas apakšintervālā $[x_{\min}; x_1]$ un šo intervālu nākošajā meklēšanas solī var izslēgt, par jauno meklēšanas intervālu pieņemot $[x_1; x_{\max}]$;
- ja $f(x_1) < f(x_2)$ (6. att. b), tad minimuma punkts neatrodas apakšintervālā $[x_2; x_{\max}]$ un nākošajā meklēšanas solī var izslēgt šo intervālu, par jauno meklēšanas intervālu pieņemot $[x_{\min}; x_2]$.

Izmantojot intervālu izslēgšanas principu, var realizēt meklēšanas procedūru, kura ļauj noteikt minimuma punktu ar pakāpenisku sākotnējā intervāla apakšintervālu izslēgšanu. Meklēšanas procedūru beidz, kad atlikušā apakšintervāla garums samazinās līdz pietiekami mazai vērtībai.

Kārtējā solī izslēdzamā apakšintervāla garums ir atkarīgs no mēģinājuma punktu x_1 un x_2 novietojuma sākotnējā meklēšanas intervāla $[x_{\min}; x_{\max}]$ iekšienē. Vēlams, lai katrā kārtējā iterācijā mēģinājuma punktu veidotie intervāli samazinātos vienādā attiecībā. Turklāt, lai paaugstinātu algoritma efektivitāti, vēlams, lai šī attiecība būtu maksimāla. Viena no šādām metodēm, kas vienlaikus daļēji apmierina abas šīs prasības, ir intervālu izslēgšanas bisekciju metode. Šī metode ļauj katrā iterācijā izslēgt tieši pusi no intervāla, t. i., katrā iterācijā intervālu samazināt divas reizes.



7. attēls. Viena argumenta funkcijas minimizācijas algoritma blokshēma, izmantojot intervālu izslēgšanas bisekciju metodi

Intervālu izslēgšanas metodes algoritms ir šāds.

1. solis. Aprēķina intervāla viduspunkta koordinātu

$$x_m = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} \quad (36)$$

un meklēšanas intervāla garumu

$$L = x_{\max} - x_{\min}. \quad (37)$$

2. solis. Atrod mēģinājuma punktus x_1 un x_2 :

$$x_1 = x_{\min} + \frac{L}{4}, \quad (38)$$

$$x_2 = x_{\max} - \frac{L}{4}. \quad (39)$$

3. solis. Aprēķina funkcijas vērtības mēģinājuma punktos $f(x_1)$, $f(x_2)$ un $f(x_m)$.

4. solis. Salīdzina $f(x_1)$ un $f(x_m)$. Ja $f(x_1) < f(x_m)$, izslēdz intervālu $[x_m; x_{\max}]$. Par jaunā meklēšanas intervāla viduspunktu kļūst punkts $x_m = x_1$. Pāriet uz 6. soli. Ja $f(x_1) > f(x_m)$, pāriet uz 5. soli.

5. solis. Salīdzina $f(x_2)$ un $f(x_m)$. Ja $f(x_2) < f(x_m)$, izslēdz intervālu $[x_{\min}; x_m]$, pieņemot $x_{\min} = x_2$. Par jaunā intervāla viduspunktu kļūst punkts $x_m = x_2$. Pāriet uz 6. soli. Ja $f(x_2) > f(x_m)$, izslēdz vienlaikus abus intervālus $[x_{\min}; x_1]$ un $[x_2; x_{\max}]$, pieņemot $x_{\min} = x_1$ un $x_{\max} = x_2$. Par jaunā intervāla viduspunktu saglabājas punkts x_m . Pāriet uz 6. soli.

6. solis. Aprēķina jaunā intervāla garumu (sk. formulu (37)). Ja $L \leq \varepsilon$, kur ε – pieļaujamā kļūda, meklēšanas procedūru beidz, pieņemot $x_{\text{opt}} = x_m$. Pretējā gadījumā pāriet uz 2. soli.

Iztirzātā minimizācijas algoritma blokshēma parādīta 7. attēlā un šī algoritma realizēšanas FORTRAN programma funkcijai $f(x) = (100 - x)^2$ dota 1. pielikumā. Var atzīmēt, ka minētā programma izmantojama jebkuras viena argumenta funkcijas minimizācijai, ja tajā atbilstoši pārveido apakšprogrammu (subroutine fx), kas paredzēta funkcijas vērtību izskaitļošanai.

6.5. Minimizācijas metode ar funkcijas parabolisku aproksimāciju

Zemāk iztirzātās metodes būtība ir tā, ka optimuma atrašanai izmanto funkcijas atvasinājumu. Šajā gadījumā mērķfunkciju tuvināti aizstāj ar pakāpes polinomu, kura atvasinājumu pielīdzina nullei un no iegūtā vienādojuma saskaņā ar (20) atrod šī polinoma minimālo vērtību. Metodes precizitāti var paaugstināt divējādi: izmantojot augstākas kārtas pakāpes polinomu vai samazinot aproksimācijas un līdz ar to arī meklēšanas intervāla garumu. Priekšroka ir dodama otrajam paņēmienam, jo trešās un augstākas kārtas polinoma konstruēšana un tālāka izmantošana ir saistīta ar samērā sarežģītām procedūrām. Turpretim intervāla samazināšana unimodālai funkcijai īpašas problēmas nerada.

Paraboliskas aproksimācijas vienkāršākais variants ir funkcijas $f(x)$ aizstāšana ar otrās pakāpes polinomu, turklāt tādu, kurā funkcijas minimālā vērtība atrodas meklēšanas intervāla $[x_{\min}; x_{\max}]$ iekšienē. Aproksimējošā polinoma konstruēšanu veic šādā secībā. Meklēšanas intervālā izvēlas trīs punktus, piemēram, $x_1 = x_{\min}$, $x_2 = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$, $x_3 = x_{\max}$ un aprēķina šajos punktos funkcijas vērtības, t. i., f_1, f_2, f_3 . Aproksimācijas polinomu lietderīgi meklēt šādā formā:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2). \quad (40)$$

Polinoma $\varphi(x)$ koeficientus a_0, a_1 un a_2 atrod no nosacījuma, ka funkcijas $\varphi(x)$ vērtības aplūkojamajos trīs punktos sakrīt ar $f(x)$ vērtībām šajos punktos. Tad no (40) iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= f(x_1) = f_1 = a_0, \\ \varphi(x_2) &= f(x_2) = f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_1), \\ \varphi(x_3) &= f(x_3) = f_3 = a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2), \end{aligned} \quad (41)$$

kurās atrisinājums dod meklējamo koeficientu vērtību:

$$a_0 = f_1, \quad (41)$$

$$a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, \quad (42)$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right). \quad (43)$$

Ja pētāmās funkcijas paraboliskās aproksimācijas precizitāte intervālā $[x_1; x_3]$ ir pietiekama, šo polinomu var izmantot optimālā punkta noteikšanai. Šajā gadījumā no izteiksmēm (20) un (40) iegūstam

$$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = a_1 + a_2(x^* - x_2) + a_2(x^* - x_1) = 0$$

un

$$x^* = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2}. \quad (44)$$

Atrastā x^* vērtība ir tuvināta vērtība un to, ja nepieciešams, var precizēt, samazinot sākotnējo aproksimācijas intervālu, t. i., pieņemot

$$x_1 = x^* - \Delta, \quad (45)$$

$$x_2 = x^* + \Delta, \quad (46)$$

turklāt Δ izvēlas tā, lai $f(x_1) > f(x^*)$ un $f(x_2) > f(x^*)$. Pēc tam meklēšanu saskaņā ar aprakstīto algoritmu turpina jaunā intervālā līdz brīdim, kamēr iepriekšējā un kārtējā iterācijā atrastās x^* vērtības atšķiras par pietiekami mazu lielumu.

6.6. Gradianta metode

Gradianta metode ir viena no izplatītākajām iterāciju metodēm vairāku argumentu mērķfunkcijas $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ minimizācijai. Kā zināms funkcijas gradients ir vektors, kura virziens sakrīt ar funkcijas $f(\bar{x})$ visstraujākās maiņas virzienu. Šī vektora komponentes izsaka ar funkcijas parciālajiem atvasinājumiem [4]:

$$G_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, G_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, G_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}. \quad (47)$$

Gradianta jēdzienu nosacīti var lietot arī viena argumenta funkcijai, ievērojot to, ka šajā gadījumā $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$ un gradientam ir tikai viena komponente

$$G(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (48)$$

Saskaņā ar gradianta metodi x vērtību katrā iterācijā var aprēķināt pēc formulas

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - sG^{(k)}, \quad (49)$$

kur $x^{(k)}$ un $x^{(k+1)}$ – mainīgā x vērtības iepriekšējā un kārtējā iterācijā; $G^{(k)} = G(x^{(k)})$ – funkcijas gradients, kas aprēķināts punktā $x = x^{(k)}$ saskaņā ar (48); s – soļa parametrs (katrā iterācijā pieņemts konstants lielums).

Mērķfunkcijas minimizācijas gradianta metodes algoritms ir šāds.

1. solis. Aprēķina funkcijas gradientu punktā $x^{(k)} = x_{\min}$, t. i., $G^{(k)}$.

2. solis. Izvēlas soļa parametra sākuma vērtību. Var atzīmēt, ka no šīs izvēles lielā mērā ir atkarīga iterāciju procesa konverģence. Izvēloties mazu soļa parametra vērtību, optimums tiek sasniegts lēni, bet, izvēloties lielu vērtību, ir risks pārsniegt funkcijas $f(x)$ minimālo vērtību un nokļūt punktā ar vēl lielāku funkcijas vērtību vai pat punktos, kas atrodas ārpus meklēšanas intervāla. Tā kā optimuma punkts parasti atrodas meklēšanas intervāla viduspunkta apkaimē, soļa parametra sākuma vērtību lietderīgi izvēlēties tā, lai mēģinājuma punkts $x^{(k+1)} = x_{\min} + (x_{\max} - x_{\min})/2$. Tad saskaņā ar izteiksmi (49) soļa parametra sākuma vērtība

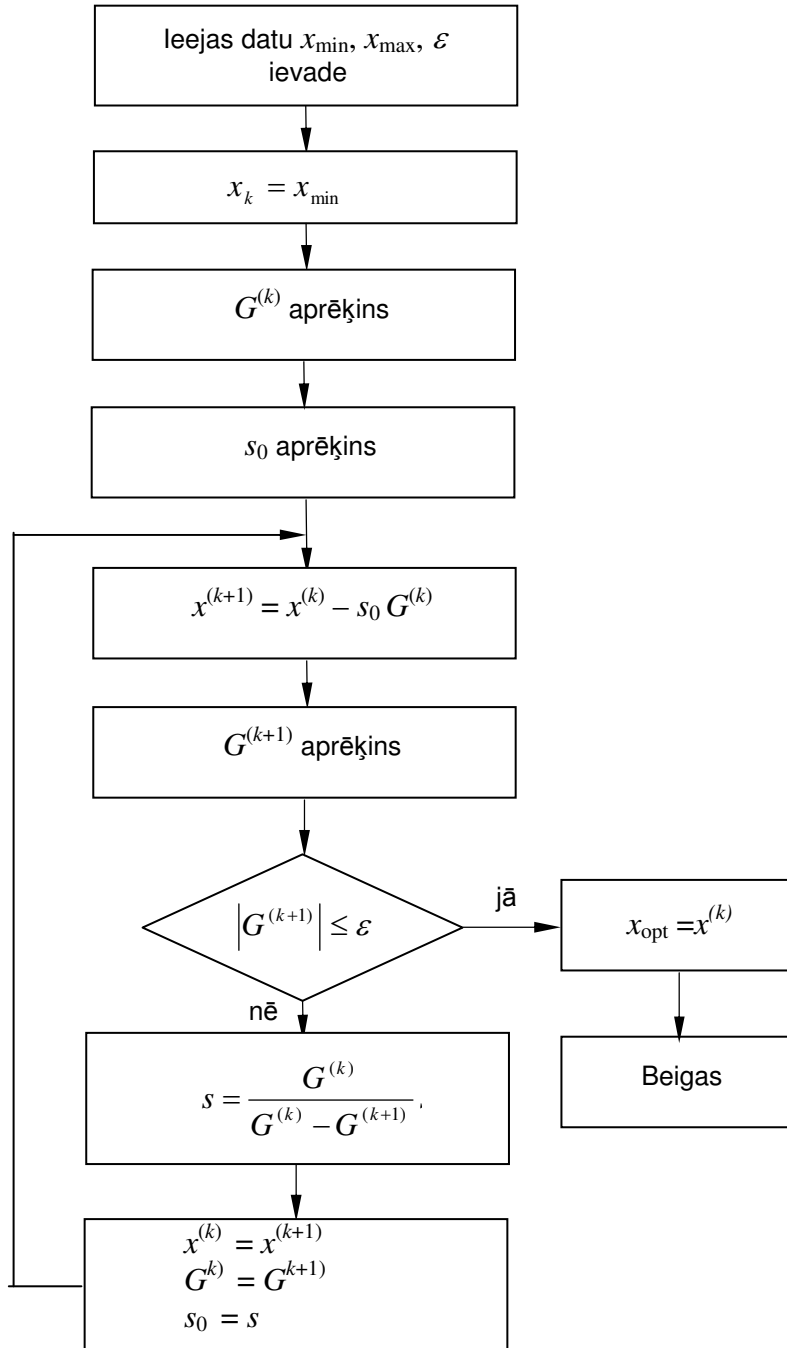
$$s_0 = -\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2G^{(k)}}. \quad (50)$$

3. solis. Pēc formulas (49) aprēķina $x^{(k+1)}$ un funkcijas gradianta vērtību šajā punktā $G^{(k+1)} = G(x^{(k+1)})$. Ja šī vērtība ir mazāka par pieļaujamo kļūdu, t. i., $|G^{(k+1)}| \leq \varepsilon$, pieņem, ka $x_{\text{opt}} = x^{(k+1)}$. Pretējā gadījumā pāriet uz 4. soli.

4. solis. Aprēķina soļa parametra kārtējās iterācijas optimālo vērtību:

$$s = \frac{G^{(k)}}{G^{(k)} - G^{(k+1)}} s_0. \quad (51)$$

Pieņemot par x nākošā tuvinājuma sākuma vērtību $x^{(k)} = x^{(k+1)}$ un $G^{(k)} = G^{(k+1)}$, atgriežas uz 3. soli.



8. attēls. Viena argumenta funkcijas minimizācijas algoritma blokshēma, izmantojot gradienta metodi

Iztirzātā algoritma blokshēma parādīta 8. attēlā un tā realizācijas FORTRAN programma funkcijai $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ dota 2. pielikumā. (Funkcijas gradients šajā gadījumā $G(x) = 3x^2 + 2x - 2$)).

7. Vairākdimensiju optimizācijas uzdevumi

7.1. Vispārīgi norādījumi

Optimizācijas praksē ir gadījumi, kad mērķfunkcija ir vairāku argumentu funkcija un jāatrod šo argumentu vērtības, kas nodrošina funkcijas minimumu. Kā tika atzīmēts iepriekš, mainīgo skaita palielināšanās sarežģī optimizācijas algoritmu un pašu optimizācijas procedūru kopumā. It īpaši tas attiecas uz magnētisko sistēmu optimizāciju, kur mērķfunkcija ir uzdots ar funkcionālu sakarību virkni, turklāt atsevišķas sakarības ir nelineāras un uzdotas tabulas veidā vai grafiski. Tādēļ, ja mainīgo skaits $N > 2$, optimizācijas uzdevumu ir lietderīgi sadalīt vairākos vienkāršos apakšuzdevumos un optimuma atrašanai izmantot minimaksa metodi. Piemēram, trīs argumentu funkcijas $f(x_1, x_2, x_3)$ gadījumā vispirms vairākām fiksētām mainīgā x_3 vērtībām atrod minimumu pēc x_1 un x_2 , bet pēc tam izvēlas minimālo no šīm vērtībām. Minēto apstākļu dēļ šeit aplūkosim tikai divu argumentu funkciju minimizācijas metodes un algoritmus. Turpmāk matemātisko izteiksmju uzskatāmības dēļ divu argumentu funkcijas mainīgo apzīmējumus x_1 un x_2 aizstāsim attiecīgi ar apzīmējumiem x un y .

Mērķfunkcijas unimodalitātes īpašība izmantojama arī divu argumentu funkcijām. Divu argumentu funkcija mainīgo x un y izmaiņas apgabālā $x_{\min} < x < x_{\max}$; $y_{\min} < y < y_{\max}$ ir unimodāla, ja šai funkcijai dotajā apgabālā ir tikai viens minimums, kas atbilst argumenta vērtībām x^* un y^* , t. i., šajā apgabālā jebkurām x un y vērtībām ir spēkā sakarība

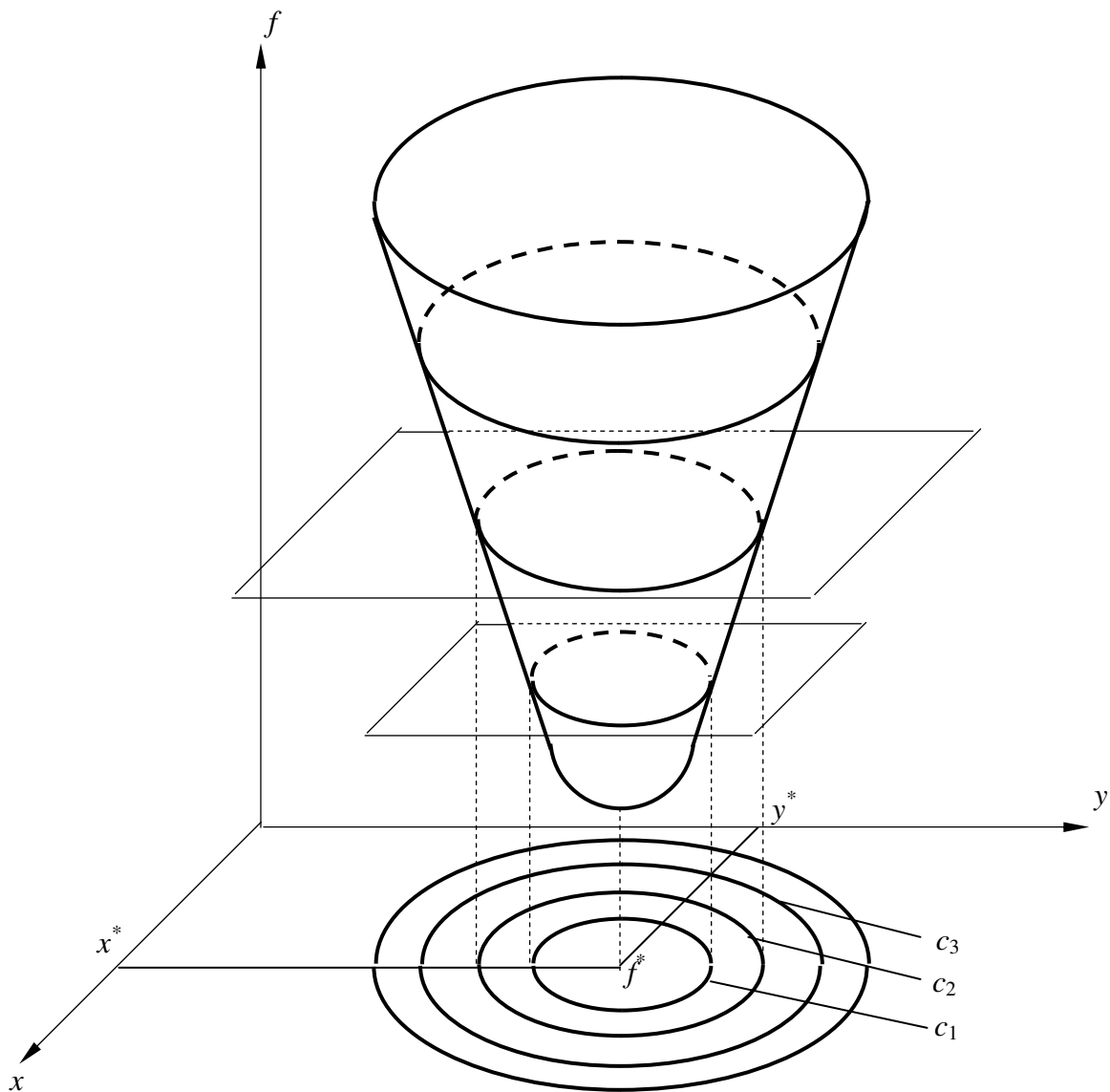
$$f(x^*, y^*) < f(x, y). \quad (52)$$

Ģeometriskajā interpretācijā divu argumentu funkcija attēlo virsmu (9.att.). Katra šīs virsmas punkta attālums līdz horizontālajai plaknei xOy ir vienāds ar funkcijas vērtību aplūkojamā punktā ar koordinātām x un y . Ja šo virsmu šķel ar paralēlām plaknēm $f_i = c_i$, iegūst noslēgtas līnijas, kuru projekcijas plaknē xOy veido līkņu kopu, ko sauc par līmeņlīnijām jeb izolīnijām. Saskaņā ar 9. attēlu $c_3 > c_2 > c_1 > f(x^*, y^*) = f^*$, kur f^* ir aplūkojamās divu argumentu funkcijas minimālā vērtība.

Divu argumentu funkcijas minimuma nepieciešamais nosacījums ir

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (53)$$

kur $\frac{\partial}{\partial x}$ un $\frac{\partial}{\partial y}$ – funkcijas $f(x, y)$ parciālie atvasinājumi.



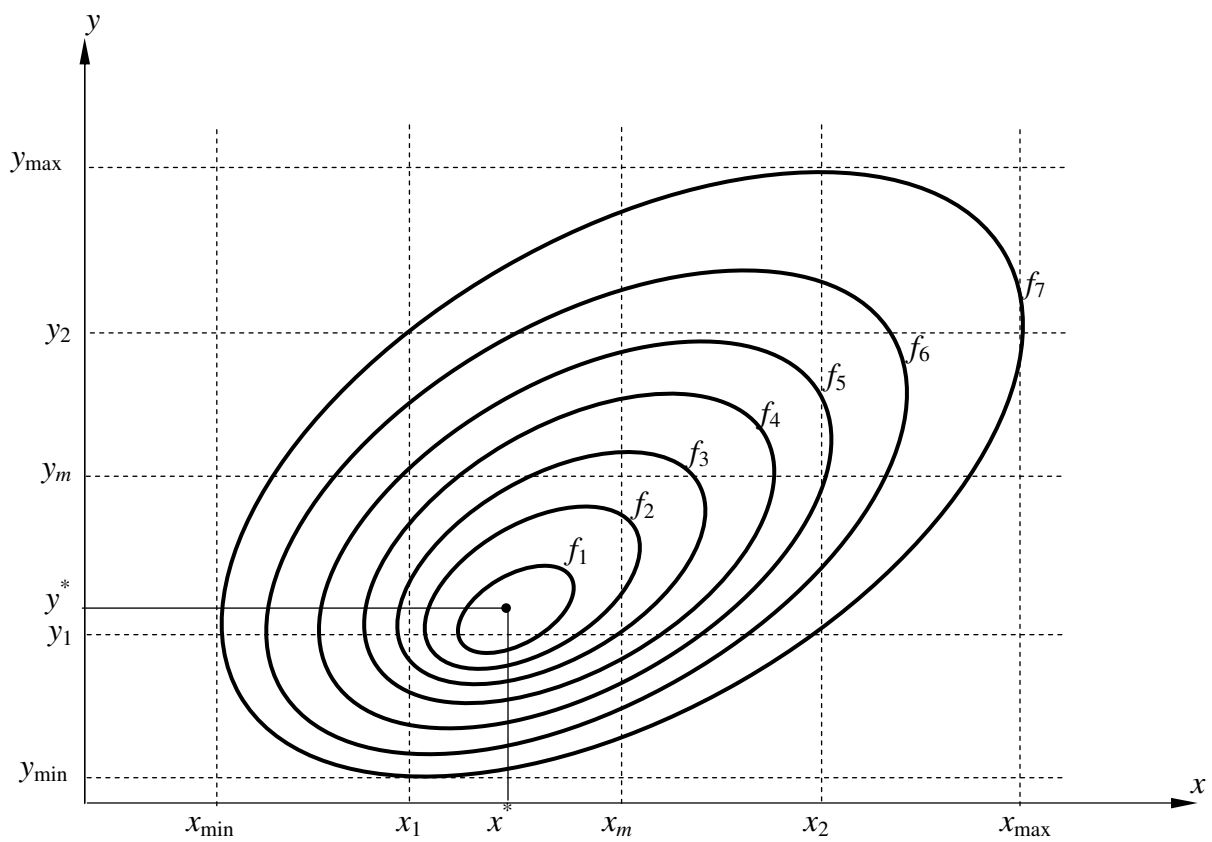
9. attēls. Divu argumentu funkcijas ģeometriskā interpretācija

Divu argumentu funkcijas minimizācijā, tāpat kā viena argumenta funkcijas gadījumā, var izmantot divas metožu grupas: metodes, kuras balstās uz funkcijas vērtību izkaitļošanu un metodes, kurā izmanto funkcijas atvasinājumus.

7.2. Divu argumentu funkcijas minimizācija ar intervālu izslēgšanas metodi

Iepriekš (sk. 6.4) tika iztirzāta intervālu izslēgšanas metodes algoritms viena argumenta funkcijai. Šī algoritma elementi izmantojami arī divu argumentu funkcijas $f(x, y)$ gadījumā.

Pieņemsim, ka noteikti argumentu x un y izmaiņas intervāli $[x_{\min}; x_{\max}]$ un $[y_{\min}; y_{\max}]$. Tad minimizācijas procedūru veic, izdarot šādu darbību secību (sk. arī 10. att.).



10. attēls. Divu argumentu funkcijas līmeņlīnijas un intervālu izslēgšanas bisekciju metodes mēģinājuma punkti

1. solis. Aprēķina meklēšanas intervālu viduspunktus

$$x_m = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}, \quad (54)$$

$$y_m = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2} \quad (55)$$

un intervālu garumus

$$L_x = x_{\max} - x_{\min}, \quad (56)$$

$$L_y = y_{\max} - y_{\min}. \quad (57)$$

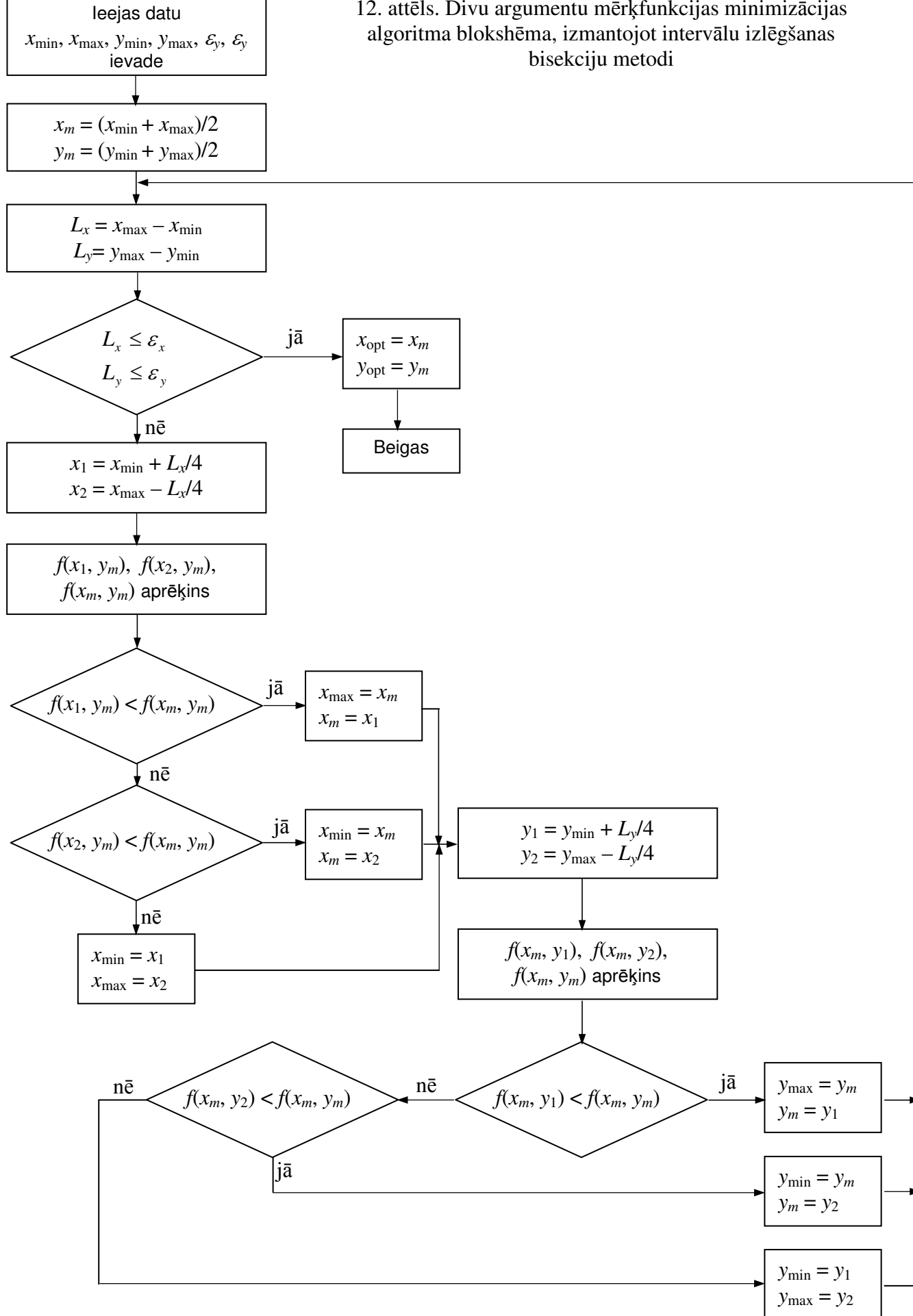
2. solis. Aprēķina mēģinājuma punktus x_1 un x_2 :

$$x_1 = x_{\min} + \frac{L_x}{4}, \quad (58)$$

$$x_2 = x_{\max} - \frac{L_x}{4}. \quad (59)$$

3. solis. Aprēķina funkcijas vērtības $f(x_1, y_m)$, $f(x_2, y_m)$, $f(x_m, y_m)$.

12. attēls. Divu argumentu mērķfunkcijas minimizācijas algoritma blokshēma, izmantojot intervālu izlēgšanas bisekciju metodi



4. solis. Salīdzina $f(x_1, y_m)$ un $f(x_m, y_m)$. Ja $f(x_1, y_m) < f(x_m, y_m)$, izslēdz mainīgā x intervālu $[x_m; x_{\max}]$, pieņemot $x_{\max} = x_m$. Par mainīgā x jaunā intervāla viduspunktu kļūst punkts x_1 , t. i., $x_m = x_1$. Pāriet uz 5. soli. Ja $f(x_1, y_m) > f(x_m, y_m)$, pāriet uz 9. soli.

5. solis. Aprēķina mēģinājuma punktus y_1 un y_2 :

$$y_1 = y_{\min} + \frac{L_y}{4}, \quad (60)$$

$$y_2 = y_{\max} - \frac{L_y}{4}. \quad (61)$$

6. solis. Aprēķina funkcijas vērtības $f(x_m, y_1)$, $f(x_m, y_2)$, $f(x_m, y_m)$.

7. solis. Salīdzina $f(x_m, y_1)$ un $f(x_m, y_m)$. Ja $f(x_m, y_1) < f(x_m, y_m)$, izslēdz mainīgā y intervālu $[y_m; y_{\max}]$, pieņemot $y_{\max} = y_m$. Par mainīgā y jaunā intervāla viduspunktu kļūst punkts y_1 , t. i., $y_m = y_1$. Pāriet uz 1. soli. Ja $f(x_m, y_1) > f(x_m, y_m)$, pāriet uz 8. soli.

8. solis. Salīdzina $f(x_m, y_2)$ un $f(x_m, y_m)$. Ja $f(x_m, y_2) < f(x_m, y_m)$, izslēdz mainīgā y intervālu $[y_{\min}; y_m]$. Par mainīgā y jaunā intervāla viduspunktu kļūst punkts y_2 , t. i., $y_m = y_2$. Pāriet uz 1. soli. Ja $f(x_m, y_2) > f(x_m, y_m)$, izslēdz mainīgā y abus malējos intervālus $[y_{\min}; y_m]$ un $[y_2; y_{\max}]$, pieņemot $y_{\min} = y_1$ un $y_{\max} = y_2$. Pāriet uz 1. soli.

9. solis. Salīdzina $f(x_2, y_m)$ un $f(x_m, y_m)$. Ja $f(x_2, y_m) < f(x_m, y_m)$, izslēdz mainīgā x intervālu $[x_m; x_{\max}]$. Par mainīgā x jaunā intervāla viduspunktu kļūst punkts x_2 , t. i., $x_m = x_2$. Pāriet uz 5. soli. Ja $f(x_2, y_m) > f(x_m, y_m)$, izslēdz mainīgā x abus malējos intervālus $[x_{\min}; x_m]$ un $[x_2; x_{\max}]$, pieņemot $x_{\min} = x_1$ un $x_{\max} = x_2$. Pāriet uz 1. soli.

10. solis. Aprēķina mainīgo x un y jaunā intervāla garumus. Ja $L_x \leq \varepsilon_x$ un $L_y \leq \varepsilon_y$ (ε_x un ε_y – pieļaujamās kļūdas), meklēšanas procedūru beidz, pieņemot $x^* = x_m$ un $y^* = y_m$. Pretējā gadījumā pāriet uz 2. soli.

Iztirzātā divu argumentu funkcijas minimizācijas algoritma blokshēma parādīta 11. attēlā un šī algoritma realizācijas FORTRAN programma funkcijai $f(x, y) = (x-2)^2 + 2,25(y+1)^2$ dota 3. pielikumā.

7.3. Gradienta metode

Kā jau iepriekš tika atzīmēts, gradientu metodē mērķfunkcijas minimizācijai izmanto funkcijas atvasinājumus. Divu argumentu funkcijas gadījumā minimuma nosacījumi saskaņā ar (53) ir

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= 0, \\ \varphi_y(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (62)$$

kur $\varphi_x(x, y)$ un $\varphi_y(x, y)$ – mainīgo x un y funkcijas, ko iegūst kā mērķfunkcijas parciālos atvasinājumus, t. i.,

$$\varphi_x(x, y) = \varphi_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad (63)$$

$$\varphi_y(x, y) = \varphi_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (64)$$

Tādējādi, lai atrastu mainīgo x un y optimālās vērtības, jāatrisina vienādojumu sistēma (62), kas parasti ir nelineāra sistēma. Tās risināšanai vispiemērotāka ir gradienta metode, jo piemēram, Ņūtona metode ir jutīga attiecībā pret sākuma tuvinājumu, bet iterāciju metodē ir speciāli jārūpējas par konverģences nodrošināšanu. Lietojot gradienta metodi šādas problēmas praktiski nepastāv.

Mērķfunkcijas minimizācijā izmanto divu argumentu funkcijas $f(x, y)$ gradientu, kas šajā gadījumā ir vektors ar divām komponentēm

$$G_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad (65)$$

$$G_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (66)$$

Saskaņā ar gradienta metodi x un y vērtības katrā nākošajā $(k+1)$ iterācijā aprēķina, izmantojot šī lieluma vērtības iepriekšējā (k) iterācijā:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - s_x G_x^{(k)}, \quad (67)$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - s_y G_y^{(k)}, \quad (68)$$

kur s_x un s_y – soļa parametri; $G_x^{(k)} = G_x(x^{(k)}, y^{(k)})$, $G_y^{(k)} = G_y(x^{(k)}, y^{(k)})$ – gradienta komponentes, kas aprēķinātas punktā $x^{(k)}, y^{(k)}$.

Mērķfunkcijas $f(x, y)$ minimizācijas algoritms ir šāds.

1. solis. Aprēķina funkcijas gradientu punktā $x_k = x_{\min}$, $y_k = y_{\min}$, t. i., vērtības $G_x^{(k)}$ un $G_y^{(k)}$.

2. solis. Izvēlas soļa parametru sākuma vērtības:

$$s_{x0} = -\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2G_x^{(k)}}; \quad (69)$$

$$s_{y0} = -\frac{y_{\max} - y_{\min}}{2G_y^{(k)}}; \quad (70)$$

3. solis. Pēc formulām (67) un (68) aprēķina $x^{(k+1)}$ un $y^{(k+1)}$ un gradienta komponentes šajā punktā $G_x^{(k)}$ un $G_y^{(k)}$. Pāriet uz 4. soli.

4. solis. Aprēķina kārtējās iterācijas soļa parametru optimālās vērtības:

$$s_x = \frac{G_x^{(k)}}{G_x^{(k)} - G_x^{(k+1)}} s_{x0}; \quad (71)$$

$$s_y = \frac{G_y^{(k)}}{G_y^{(k)} - G_y^{(k+1)}} s_{y0}. \quad (72)$$

Pieņemot par x un y nākošā tuvinājuma sākuma vērtībām attiecīgi $x^{(k)} = x^{(k+1)}$ un $y^{(k)} = y^{(k+1)}$, kā arī $G_x^{(k)} = G_x^{(k+1)}$ un $G_y^{(k)} = G_y^{(k+1)}$, atgriežas uz 3. soli.

5. Šādas procedūras turpina tik ilgi, kāmēr gradienta komponentes kārtējā iterācijā sasniedz pietiekami mazas vērtības: $|G_x^{(k)}| \leq \varepsilon_x$ un $|G_y^{(k)}| \leq \varepsilon_y$.

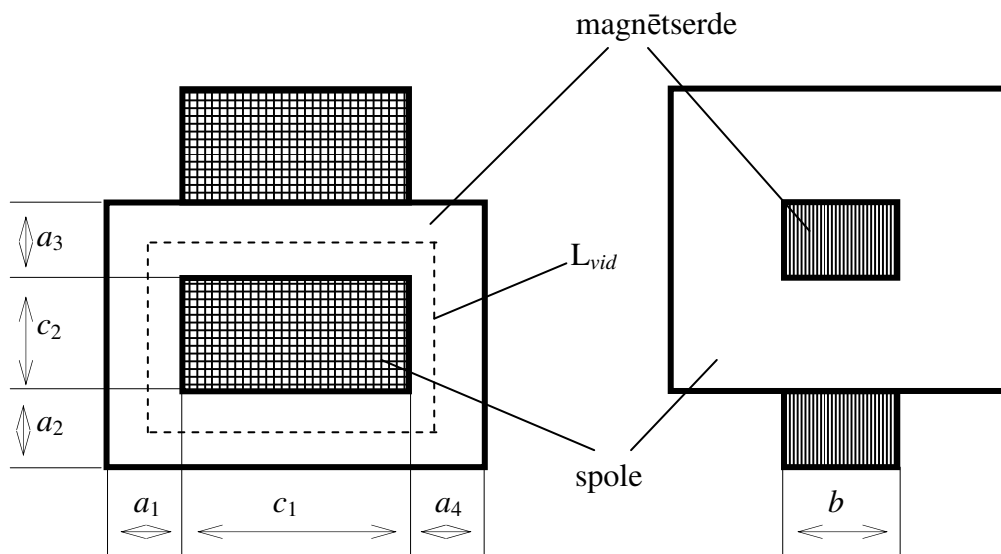
Iztirzātā algoritma blokskāma pēc struktūras ir pilnībā līdzīga 8. attēlā parādītajai shēmai, ja tajā mainīgā x vietā aplūko divus mainīgos x un y , kā arī ievēro divas gradienta komponentes G_x un G_y .

FORTTRAN programma divu argumentu funkcijas $f(x, y) = (x-2)^2 + 2,25(y+1)^2 + xy$ minimizācijai ar gradienta metodi dota 4. pielikumā. Šajā piemērā funkcijas $f(x, y)$ gradienta komponentes saskaņā ar (65) un (66) $G_x = 2(x-2) + y$, $G_y = 4,5(y+1) + x$.

8. Magnētiskās sistēmas optimizācijas uzdevuma piemērs

8.1. Uzdevuma nostādne un pētāmā objekta matemātiskais modelis

Šajā piemērā aplūkosim vienkāršu ierīci – droseļi ar feromagnētiska materiāla serdi, kuras raksturīgie izmēri parādīti 13. attēlā.



13. attēls. Drosele ar feromagnētisku serdi un tās raksturīgie izmēri

Pieņemsim, ka strāvai spolē, kuras vijumu skaits ir w , ir jānodrošina serdē noteikta magnētiskā plūsma Φ .

Uzdevuma nostādne, kas ņemta par pamatu zemāk iztirzātajam optimizācijas uzdevumam ir šāda.

Optimizējamās sistēmas robežas noteiktas ar izvēlēto konstrukciju (stieņu tipa magnētqvads ar vienu spoli). Termiskie ierobežojumi pastarpināti tiek ievēroti ar tinuma strāvas blīvuma j izvēli. Lai samazinātu variējamo parametru skaitu, pieņemsim, ka $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$ un $c_1 = c_2 = c$.

Par optimizācijas kvantitatīvo kritēriju (raksturkritēriju) pieņemtas droseles materiālu izmaksas, kas veidojas no tinuma vadu un elektrotehniskā lokšņu tērauda kopējām izmaksām.

Par sistēmas neatkarīgajiem mainīgajiem pieņemti šādi lielumi: magnētserdes platums a un tās biezums b , kā arī iepriekš minētie dotie lielumi – magnētiskā plūsma Φ un strāvas blīvums j . Šeit jāatzīmē, ka lielums c nav neatkarīgs lielums, jo to nosaka magnētqvada loģa laukums, kas, savukārt, ir atkarīgs no tinuma magnetizētājspēka iw un strāvas blīvuma j .

Sistēmas matemātiskā modeļa izveidē par pamatu ņemti magnētisko ķēžu teorijas elementi, izmantojot pilnās strāvas likumu vienkāršotā formā, neievērojot izkliedes plūsmu, kā arī pieņemot, ka magnētiskās indukcijas vērtības jebkurā serdes šķērsriezuma vietā ir vienādas.

Saskaņā ar formulēto uzdevuma nostādni aplūkojamais uzdevums ir divdimensiju optimizācijas uzdevums ar mainīgajiem a un b . Uzdevumu var vienkāršot, izmantojot iepriekš (sk. 7.1.) pieminēto minimaksa stratēģiju, t. i., risinot vairākus uzdevumus dažādām $b = \text{const}$ (b_1, b_2, b_3, \dots) vērtībām kā viendimensijas optimizācijas uzdevumus un katrai no šīm vērtībām atrodot atbilstošos optimumus $a_{\text{opt}1}, a_{\text{opt}2}, a_{\text{opt}3}, \dots$. Tā rezultātā iespējams iegūt funkcionālu sakarību $a_{\text{opt}} = f(b)$, no kuras grafiski vai citādā veidā var atrast b_{opt} .

Noskaidrosim aplūkojamā uzdevuma matemātiskās sakarības, ar kurām var aprakstīt pētāmā objekta matemātisko modeli.

Saskaņā ar uzdevuma nostādne pieņemtajiem vienkāršojumiem un pilnās strāvas likumu

$$HL_{\text{vid}} = iw, \quad (73)$$

kur $iw = F$ – tinuma pilnā strāva jeb magnetizētājspēks; H – magnētiskā lauka intensitāte; L_{vid} – magnētiskās spēka līnijas vidējais garums serdē..

Tuvināti pieņemot, ka magnētiskās spēka līnijas vidējais garums (sk. 13. att)

$$L_{\text{vid}} = 4(a + c), \quad (74)$$

izteiksmes (73) vietā iegūstam

$$iw = 4H(a + c). \quad (75)$$

Spoles magnetizētājspēku var izteikt arī ar strāvas blīvumu:

$$j = \frac{iw}{S_{Cu}}, \quad (76)$$

kur $S_{Cu} = c^2$ – spoles malas šķērsriezuma laukums, kas pieņemts vienāds ar loga laukumu. (Strāvas blīvums j šajā gadījumā ir nosacītais blīvums, jo tas noteikts nevis attiecībā pret vada aktīvo šķērsriezuma laukumu, bet pret loga šķērsriezuma laukumu, kas ietver arī vada un spoles izolāciju. Precīzākos aprēķinos to var ievērot ar aizpildes koeficientu).

Tādējādi no izteiksmes (76) izriet, ka

$$iw = jc^2. \quad (77)$$

Pielīdzinot izteiksmju (75) un (77) labās puses, iegūstam vienādojumu

$$4H(a+c) = jc^2,$$

kura atrisinājums attiecībā pret c dod

$$c = \frac{2H + 2\sqrt{H^2 + jaH}}{j}. \quad (78)$$

Magnētiskā indukcija serdē

$$B = \frac{\Phi}{ab}. \quad (79)$$

Saskaņā ar 13. attēlu magnētserdes tilpums

$$V_{Fe} = 4a(a+c)b \quad (80)$$

un spoles tilpums

$$V_{Cu} = 2c^2(a+b+2c). \quad (81)$$

Droseles materiālu kopējās izmaksas

$$A = q_{Fe}\gamma_{Fe}V_{Fe} + q_{Cu}\gamma_{Cu}V_{Cu} = 2q_{Fe}\left[2\gamma_{Fe}a(a+c)b + \frac{q_{Cu}}{q_{Fe}}\gamma_{Cu}c^2(a+b+2c)\right], \quad (82)$$

kur q_{Fe} un q_{Cu} – attiecīgi serdes tērauda un tinuma vada viena kg cena; γ_{Fe} un γ_{Cu} – attiecīgi tērauda un vara blīvums ($\gamma_{Fe} = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\gamma_{Cu} = 8900 \text{ kg/m}^3$).

Mērķfunkciju šajā gadījumā var izteikt kā

$$f(a) = \frac{A}{2q_{Fe}}$$

jeb, ievērojot (82),

$$f(a) = \left[2\gamma_{Fe}a(a+c)b + \frac{q_{Cu}}{q_{Fe}}\gamma_{Cu}c^2(a+b+2c)\right]. \quad (83)$$

Var atzīmēt, ka, minimizējot nevis kopējās materiālu izmaksas, bet droseles kopējo masu, arī var izmantot izteiksmi (83), ievietojot tajā $q_{\text{Cu}}/q_{\text{Fe}} = 1$.

Atzīmēsim, ka mērķfunkcija (83) ir uzdota kā funkcionālu sakarību virkne:

$$A = f_1(c, a), \quad (84)$$

$$c = f_2(a, H), \quad (85)$$

$$H = f_3(B), \quad (86)$$

$$B = f_4(a, b), \quad (87)$$

kurā sakarības (84) un (85) ir uzdotas apslēptā formā un sakarība (86) ir nelineāra funkcija, kas uzdota tabulas veidā vai grafiski. Tāpēc mērķfunkcijas minimizācijai vispiemērotākā ir intervālu izslēgšanas metode (sk. 6.4.), kuras algoritms aplūkojamā piemēra gadījumā ir šāds.

1. solis. Nosaka mainīgā a meklēšanas intervālu $[a_{\min}; a_{\max}]$:

$$a_{\min} = \frac{\Phi}{B_{\max}}, \quad (88)$$

$$a_{\max} = \frac{\Phi}{B_{\min}}, \quad (89)$$

kur, vadoties no pieredzes, var pieņemt $B_{\min} = 0,1 \text{ T}$, $B_{\max} = 2,5 \text{ T}$. Šādas magnētiskās indukcijas vērtības garantē to, ka optimuma punkts atradīsies minētajā intervālā $[a_{\min}; a_{\max}]$.

2. solis. Saskaņā ar intervālu izslēgšanas bisekciju metodi atrod mēģinājuma punktu

$$a_m = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2}, \quad (90)$$

meklēšanas intervāla garumu

$$t = a_{\max} - a_{\min} \quad (91)$$

un mēģinājuma punktus

$$a_1 = a_{\min} + \frac{t}{4}, \quad (92)$$

$$a_2 = a_{\max} - \frac{t}{4}. \quad (93)$$

3. solis. Pēc formulas (79) aprēķina magnētiskās indukcijas vērtības attiecīgajos mēģinājuma punktos:

$$B_1 = \frac{\Phi}{a_1 b}, \quad (94)$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{a_2 b}, \quad (95)$$

$$B_m = \frac{\Phi}{a_m b}. \quad (96)$$

4. solis. No materiāla magnetizēšanas līknes $B = f(H)$ indukcijas vērtībām B_1 , B_2 un B_m atrod atbilstošās magnētiskā lauka intensitātes vērtības $H_1 = f(B_1)$, $H_2 = f(B_2)$ un $H_m = f(B_m)$. Šim nolūkam var izmantot speciālu apakšprogrammu (sk. 5. pielikumu).

5. solis. Pēc formulas (78) lielumu a_1 , a_2 , a_m un H_1 , H_2 , H_m vērtībām aprēķina c_1 , c_2 un c_m atbilstošās vērtības.

6. solis. Pēc formulas (83) attiecīgajos mēģinājuma punktos aprēķina mērķfunkcijas skaitliskās vērtības $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_m)$.

7. solis. Izmantojot intervālu izslēgšanas bisekciju metodes algoritmu (sk. 6.4.), atrod jaunās a_{\min} un a_{\max} vērtības un pāriet uz 2. soli.

Šādu iterāciju procesu turpina tik ilgi, kamēr $|t| \leq \varepsilon$, kur ε – uzdotā pieļaujamā kļūda.

Nobeigumā var atzīmēt, ka šeit iztirzātā optimizācijas metode un algoritms pamatvilcienos ir piemērojami jebkura veida magnētiskajai sistēmai. Atšķirība citāda veida magnētiskajām sistēmām izpaudīsies tikai mērķfunkcijas matemātiskajās izteiksmēs un atsevišķās sakarībās, kas saistītas ar pētāmā objekta ģeometriskajiem izmēriem, turklāt sarežģītākās magnētiskās sistēmās jāņem vērā tas apstāklis, ka magnētiskā ķēde nav viendabīga un satur dažāda šķērsriezuma un dažāda materiāla elementus, tajā skaitā gaisa spraugas. Tāpēc minētajos gadījumos izteiksmes (73) vietā būtu jāizmanto izteiksme

$$iW = \sum_i H_i L_{i\text{vid}}, \quad (97)$$

kur ar indeksu i apzīmēti magnētiskās ķēdes atsevišķi nevienādabīgie elementi.

8.2. Drosoles optimizācijas programmatūra

5. pielikumā dota FORTRAN programma, kas realizē iepriekš iztirzāto algoritmu. Šī programma ietver vairākas apakšprogrammas, kas paredzētas atsevišķu procedūru izpildei. Pirmā no tām (subroutine mag) paredzēta magnetizēšanas līknes izvēlei, kas tiek veikta atbilstoši ieejas datos uzdotajam magnētiskā materiāla nosacītajam apzīmējumam jeb identifikācijas numuram (sk. tabulu) praksē visvairāk izmantojamo elektrotehnisko lokšņu tēraudu un lieto tēraudu markām. Otrā apakšprogramma (subroutine hb) attiecīgai tērauda markai ļauj noteikt magnētiskās indukcijas vērtībai atbilstošu lauka intensitātes H vērtību. Šajā apakšprogrammā izmantota magnetizēšanas līknes gabaliem paraboliska aproksimācija. Trešā apakšprogramma (subroutine merkfunk) paredzēta mērķfunkcijas skaitlisko vērtību aprēķināšanai pēc 8.1. dotajām formulām

Programmā pieņemtie galveno lielumu apzīmējumi (identifikatori) norādīti tabulā.

Lielums	Apzīmējums formulās	Apzīmējums programmā
Uzdotā pieļaujamā kļūda	ε	eps
Magnētiskā plūsma	Φ	F
Strāvas blīvums	j	ajm
Tinuma vadu un serdes tērauda cenu attiecība	q_{Cu}/q_{Fe}	p11
Magnētiskās indukcijas minimālā un maksimālā vērtība	B_{min}, B_{max}	Bmin, Bmax
Magnētserdes materiāla tērauda markas nosacītais apzīmējums	-	nmat *
Magnētserdes biezums	b	t
Magnētserdes platuma minimālā un maksimālā vērtība	a_{min}, a_{max}	aa, bb
Mēģinājuma punkti	a_1, a_2, a_m	x1, x2, xm
Mērķfunkcijas skaitliskās vērtības, kas aprēķinātas saskaņā ar izteiksmi (83)	$f(a_1), f(a_2), f(a_m)$	fx1, fx2, fxm

* Nosacītie apzīmējumi atbilst standartizētiem tērauda marķu apzīmējumiem [5]:

- elektrotehniskajam lokšņu tēraudam – 1211, 1213, 1311, 1411, 1412, 1413, 1511, 1512, 1513, 3411, 2013, 2211, 2312, 2411;
- T3 markas lokšņu tēraudam un lietajam tēraudam – 3.

Programma viena argumenta funkcijas minimizācijai ar intervālu izslēgšanas bisekciju metodi

```
open(2,file='res')
write(*,*) ('eps=')
read(*,*) eps
write(*,*) ('Xmin=')
read(*,*) xmin
write(*,*) ('Xmax=')
read(*,*) xmax
1 xm=(xmin+xmax)/2
  el=xmax-xmin
  if(el.le.eps) goto 4
  x1=xmin+el/4
  x2=xmax-el/4
  call fx(x1,f1)
  call fx(x2,f2)
  call fx(xm,fm)
  if(f1.lt.fm) then
    xmax=xm
    goto 1
  else
    if(f2.lt.fm) then
      xmin=xm
      goto 1
    else
      xmin=x1
      xmax=x2
      goto 1
    end if
  end if
4 xopt=xm
  write(2,76) xopt
76 format(1x,'xopt=',e8.3)
end

subroutine fx(x,f)
f=(100.0-x)**2
return
end
```

Programma viena argumenta funkcijas minimizācijai ar gradienta metodi

```
open (2,file='gradlres')
write (*,*) ('Xmin=')
read (*,*) xmin
write (*,*) ('Xmax=')
read (*,*) xmax
write (*,*) ('eps=')
read (*,*) eps
xk=xmin
call grad(xk,gk)
s0=-(xmax-xmin)/2/gk
66 xk1=xk-s0*gk
call grad(xk1,gk1)
if(abs(gk1).le.eps) then
goto 99
else
s=gk*s/(gk-gk1)
xk=xk1
gk=gk1
s=s0
goto 66
end if
99 xopt=xk1
write (2,55) xopt
55 format (1x,'Xopt=',f6.3)
88 end

subroutine grad(x,g)
g=3*x**2+2*x-2
return
end
```

Programma divu argumentu funkcijas minimizācijai ar intervālu izslēgšanas bisekciju metodi

```

open(2,file='xy')
write(*,*) ('Xmin=')
read(*,*) xmin
write(*,*) ('Xmax=')
read(*,*) xmax
write(*,*) ('Ymin=')
read(*,*) ymin
write(*,*) ('Ymax=')
read(*,*) ymax
write(*,*) ('precizitāte epsx=')
read(*,*) epsx
write(*,*) ('precizitāte epsy=')
read(*,*) epsy
xm=(xmin+xmax)/2
ym=(ymin+ymax)/2
66 tx=xmax-xmin
   ty=ymax-ymin
   if(tx.lt.epsx.and.ty.lt.epsy) goto 11
   x1=xmin+tx/4
   x2=xmax-tx/4
   call fxy(x1,ym,fx1)
   call fxy(x2,ym,fx2)
   call fxy(xm,ym,fxm)
   if(fx1.lt.fxm) then
     xmax=xm
     xm=x1
     goto 33
   else
     if(fx2.lt.fxm) then
       xmin=xm
       xm=x2
       goto 33
     else
       xmin=x1
       xmax=x2
       xm=xm
       goto 33
     end if
   end if
33 y1=ymin+ty/4
   y2=ymax-ty/4
   call fxy(xm,y1,fy1)
   call fxy(xm,y2,fy2)
   call fxy(xm,ym,fym)
   if(fy1.lt.fym) then
     ymax=ym
     ym=y1
     goto 66
   else
     if(fy2.lt.fym) then
       ymin=ym
       ym=y2
       goto 66
     else
       ymin=y1

```

```
    ymax=y2
    ym=ym
    goto 66
end if
end if
11 xopt=xm
    yopt=ym
    write(2,88) xopt,yopt
88 format(1x,'Xopt=',f8.5,3x,'Yopt=',f8.5)
end

subroutine fxy(x,y,f)
f=(x-2)**2+2.25*(y+1)**2
return
end
```

Programma divu argumenta funkcijas minimizācijai ar gradienta metodi

```

open (2,file='grad2res')
write (*,*) ('Xmin=')
read (*,*) xmin
write (*,*) ('Xmax=')
read (*,*) xmax
write (*,*) ('Ymin=')
read (*,*) ymin
write (*,*) ('Ymax=')
read (*,*) ymax
write (*,*) ('epsx=')
read (*,*) epsx
write (*,*) ('epsy=')
read (*,*) epsy
xk=xmin
yk=ymin
call gradx(xk,yk,gxk)
call grady(xk,yk,gyk)
sx=-(xmax-xmin)/2/gxk
sy=-(ymax-ymin)/2/gyk
66 xk1=xk-sx*gxk
   yk1=yk-sy*gyk
   call gradx(xk1,yk1,gxk1)
   call grady(xk1,yk1,gyk1)
   if(abs(gxk1).le.epsx.and.abs(gyk1).le.epsy) then
   goto 99
   else
   sx=gxk*sx/(gxk-gxk1)
   sy=gyk*sy/(gyk-gyk1)
   xk=xk1
   yk=yk1
   gxk=gxk1
   gyk=gyk1
   goto 66
   end if
99 xopt=xk1
   yopt=yk1
   write (2,55) xopt,yopt
55 format (1x,'Xopt=',f7.4, 3x,'Yopt=',f7.4)
88 end

subroutine gradx(x,y,g)
g=10*x+13*y-7
return
end

subroutine grady(x,y,g)
g=13*x+42.5*y+32.5
return
end

```


Droseles optimizācijas programma

```

C *****
C *
C * DROSELES MAGNĒTVADA OPTIMIZĀCIJAS PROGRAMMAS PIEMĒRS *
C *****
C
C
C      open ( 2,file='rezopt')
C =====
C      rrrrr - faila nosaukums, kurā tiks ierakstīts rezultāts
C -----
C      Apzīmējumi programmā:
C      eps - precizitāte;
C      F - magnetiskā plūsma;
C      t - serdes biezums;
C      ajm - strāvas blīvums tinumā;
C      p11 - tinuma vadu un serdes tērauda cenu attiecība;
C      Bmin - magnētiskās indukcijas minimālā vērtība;
C      Bmax - magnētiskas indukcijas maksimālā vērtība;
C      nmat - magnētserdes tērauda markas apzīmējums;
C      aa - optimizējamā parametra minimālā vērtība;
C      bb - optimizējamā parametra maksimālā vērtība;
C -----
C =====
C -----
C      DATU IEVADES BLOKS
C      write (*,*) ('eps=')
C      read (*,*) eps
C      write (*,*) ('F=')
C      read (*,*) F
C      write (*,*) ('t=')
C      read (*,*) t
C      write (*,*) ('ajm=')
C      read (*,*) ajm
C      write (*,*) ('p11=')
C      read (*,*) p11
C      write (*,*) ('Bmin=')
C      read (*,*) Bmin
C      write (*,*) ('Bmax=')
C      read (*,*) Bmax
C      write (*,*) ('nmat=')
C      read (*,*) nmat
C -----
C
C      aa=F/(t*Bmax)
C      bb=F/(t*Bmin)
C      a=aa
C      b=bb
C      1 xm=(a+b)/2
C      el=b-a
C      if(el.le.eps) goto 4
C      x1=a+el/4
C      x2=b-el/4

```

```

B1=F/(t*x1)
call mag (nmat,B1,H1)
call merkfunk (H1,ajm,t,p11,x1,fx1)
B2=F/(t*x2)
call mag (nmat,B2,H2)
call merkfunk (H2,ajm,t,p11,x2,fx2)
Bm=F/(t*xm)
call mag (nmat,Bm,Hm)
call merkfunk (Hm,ajm,t,p11,xm,fxm)
if (fx1.gt.fxm.and.fx2.gt.fxm) goto 2
if (fx1.gt.fx2) then
a=x1
goto 1
else
b=x2
goto 1
end if
2 a=x1
b=x2
goto 1
4 xopt=xm
Bopt=F/(t*xopt)
call mag (nmat,Bopt,Hopt)
call merkfunk (Hopt,ajm,t,p11,xopt,fxopt)
write (2,76) xopt,fxopt
76 format (1x,'xopt=',e8.3,2x,'fxopt=',e10.3)
U=(bb-aa)/10
do 88 N=1,11
xl=aa+(N-1)*U
B1=F/(t*x1)
call mag (nmat,B1,H1)
call merkfunk (H1,ajm,t,p11,x1,fx1)
write (2,323) xl,fx1
323 format (1x,e8.3,3x,e8.3)
88 continue
end

c
c *****
c * MAGNETIZĒŠANAS LĪKNES IZVĒLES APAKŠPROGRAMMA*
c * FUNKCIONĀLĀS SAKARĪBAS  $H=f(B)$  NOTEIKŠANAI *
c *****

subroutine mag (nmat,b,h)
DIMENSION h12(37),h14(37),h15(37),h34(37),h20(37),h22(37),
%h24(37),h3(37)
double precision h12,h14,h15,h34,h20,h22,h24,h3
data h12/140.,155.,171.,191.,211.,236.,261.,287.,318.,352.,397.,
%3280.,4370.,5800.,7780.,10100.,12800.,15900.,19700.,24600.,
%31000.,42000.,65500.,104000.,144000./
data 14/60.,67.5,75.,82.5,90.,99.,109.,119.,133.,147.,166.,189.,
%217.,252.,298.,359.,444.,562.,722.,960.,1410.,2140.,3140.,4420.,
%5980.,7930.,10100.,13700.,18100.,24100.,33500.,53700.,88300.,
%128000.,167000.,207000.,247000/
data h15/91.2,102.6,114.,129.,148.,168.,192.,220.,254.,289.,325.,
%367.,414.,470.,538.,623.,730.,870.,1080.,1410.,1940.,2700.,3850.,
%5000.,6700.,9300.,13000.,18000.,23000.,28000.,34000.,42500.,
%70000.,108000.,148000.,188000.,228000./
data h34/53.4,60.1,66.7,73.4,80.1,89.1,98.7,109.1,120.,131.7,
%143.7,156.6,170.,190.,215.,240.,280.,320.,370.,430.,500.,580.,
%700.,850.,1000.,1500.,2000.,2500.,4000.,5900.,9200.,19000.,
%40000.,65000.,90000.,115000.,140000./
data h20/44.,49.5,55.,60.5,66.,71.5,77.,82.5,88.,93.5,99.,104.5,

```

```

%110.,117.,125.,132.,141.,170.,200.,250.,300.,430.,620.,1130.,
%1700.,2500.,3400.,5000.,7000.,10000.,13000.,16500.,20700.,30000.,
%60000.,95000.,135000./
  data h22/54.84,61.69,68.55,75.4,82.26,89.11,96.,118.,140.,165.,
%190.,215.,240.,270.,300.,350.,400.,460.,550.,730.,1000.,1300.,
%1600.,2350.,3400.,4700.,7700.,10600.,13400.,16400.,19400.,27800.,
%38800.,49800.,65500.,104000.,144000./
  data h24/60.,67.5,75.,82.5,90.,99.,109.,119.,133.,147.,166.,187.,
%217.,252.,295.,344.,399.,460.,585.,860.,1230.,1750.,2500.,3540.,
%5000.,7120.,10000.,12500.,15600.,19100.,25000.,37500.,59000.,
%104000.,149000.,194000.,239000./
  data h3/320.,360.,400.,443.,488.,535.,584.,632.,682.,745.,798.,
%850.,924.,1004.,1090.,1187.,1290.,1430.,1590.,1810.,2090.,2440.,
%2890.,3430.,4100.,4850.,8500.,10000.,12800.,15800.,20200.,23500.,
%29000.,36100.,46000.,56000.,66000./
  if (nmat.eq.1211.or.nmat.eq.1213.or.nmat.eq.1311) go to 10
  if (nmat.eq.1411.or.nmat.eq.1412.or.nmat.eq.1413) go to 11
  if (nmat.eq.1511.or.nmat.eq.1512.or.nmat.eq.1513) go to 12
  if (nmat.eq.3411) go to 13
  if (nmat.eq.2013) go to 14
  if (nmat.eq.2211.or.nmat.eq.2312) go to 15
  if (nmat.eq.2411) go to 16
  if (nmat.eq.3) go to 17
10 call hb(h12,b,h)
   go to 101
11 call hb(h14,b,h)
   go to 101
12 call hb(h15,b,h)
   go to 101
13 call hb(h34,b,h)
   go to 101
14 call hb(h20,b,h)
   go to 101
15 call hb(h22,b,h)
   go to 101
16 call hb(h24,b,h)
   go to 101
17 call hb(h3,b,h)
101 end
c
c *****
c * FUNKCIONĀLĀS SAKARĪBAS  $H=f(B)$  NOTEIKŠANAS APAKŠPROGRAMMA *
c *****
  subroutine hb(hh,b,h)
    double precision a2,a1,a0,bb,hh
    dimension bb(37),hh(37)
    do 39 i=1,37
39  bb(i)=0.4+(i-1)*0.05
      if(0.le.b.and.b.lt.bb(1)) go to 30
      j=1
50  if(bb(j).le.b.and.b.lt.bb(j+1)) go to 31
      j=j+1
      if (j.ge.36) go to 32
      go to 50
30  a1=2.5*hh(1)
      h=a1*b
      go to 70
31  a2=200.0*(hh(j+2)-2*hh(j+1)+hh(j))
      a1=10.0*(-hh(j+2)+4*hh(j+1)-3*hh(j))
      a0=hh(j)
      go to 60

```

```

32 a1=20.0*(hh(37)-hh(36))
   a0=hh(36)
   h=a1*(b-bb(36))+a0
   go to 70
60 h=a2*(b-bb(j))**2+a1*(b-bb(j))+a0
70 return
   end
C
C *****
C *   MĒRĶFUNKCIJAS APRĒĶINĀŠANAS APAKŠPROGRAMMA   *
C *****
   subroutine merkfunk (H,aj,t,p,x,fx)
   c=(2*H+2*sqrt(H**2+aj*t*H))/aj
   fx=2*7800*x*(x+c)*t+8900*p*c**2*(x+t+2*c)
   return
   end

```

Literatūra

1. A. Zviedris. Elektriskās mašīnas. R.: “Zvaigzne”, 1984.
2. A. Zviedris. Elektrisko mašīnu elektromagnētiskie aprēķini. R.: RTU, 2001.
3. A. Zviedris. Datorrealizācijas matemātiskās metodes. R.: RTU, 1999.
4. M. Buiķis, B. Siliņa. Matemātika. Definīcijas, formulas, aprēķinu algoritmi. R.: “Zvaigzne ABC”, 1997.
5. Проектирование электрических машин. Под. ред. И. П. Копылова. М.: “Энергоатомиздат”, 1980.

Saturs

Ievads	3
1. Elektromašīnu un transformatoru magnētiskās sistēmas un to īpatnības.	3
2. Magnētisko sistēmu izvēles vispārīgi kritēriji	4
3. Optimizācijas metodoloģiskie pamati	5
4. Optimizācijas uzdevuma nostādne	8
5. Optimizācijas uzdevumu struktūra.	10
6. Viendimensijas optimizācijas uzdevumi	11
6.1. Viena argumenta funkcijas īpašības	11
6.2. Optimalitātes kritēriji	13
6.3. Viena argumenta funkcijas minimizācijas metožu vispārīgs raksturojums	14
6.4. Viena argumenta funkcijas minimizācija ar intervālu izslēgšanas metodi.	17
6.5. Minimizācijas metode ar funkcijas parabolisku aproksimāciju	20
6.6. Gradianta metode	22
7. Vairākdimensiju optimizācijas uzdevumi	24
7.1. Vispārīgi norādījumi	24
7.2. Divu argumentu funkcijas minimizācija ar intervālu izslēgšanas metodi.	25
7.3. Gradianta metode.	28
8. Magnētiskā sistēmas optimizācijas uzdevuma piemērs.	30
8.1. Uzdevuma nostādne un pētāmā objekta matemātiskais modelis.	30
8.2. Drosoles optimizācijas programmatūra.	34
Pielikumi	36
1. pielikums. Programma viena argumenta funkcijas minimizācijai ar intervālu izslēgšanas bisekciju metodi	36
2. pielikums. Programma viena argumenta funkcijas minimizācijai ar gradianta metodi	37
3. pielikums. Programma divu argumentu funkcijas minimizācijai ar intervālu izslēgšanas bisekciju metodi	38
4. pielikums. Programma divu argumentu funkcijas minimizācijai ar gradianta metodi	40
5. pielikums. Drosoles optimizācijas programma.	41
Literatūra	45