LATVIJAS JŪRAS AKADĒMIJA

9. starptautiskā konference

UDENS TRANSPORTS UN INFRASTRUKTURA 2007

9th International Conference

MARITIME TRANSPORT AND INFRASTRUCTURE 2007

RĪGA,
2007. GADA 19.-20. APRĪLIS

NESTACIONĀRA SILTUMVADĪŠANAS PROCESA MATEMĀTISKS APRAKSTS SAULES KOLEKTORĀ

NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION PROCESS ON A SOLAR COLLECTOR

Voldemārs Barkāns*, Ābrams Temkins, Pēteris Šipkovs***, Mārtiņš Vanags****, Kristina Ļebedeva***

**Latvijas Jūras Akadēmija, Kronvalda bulv. 6, LV-1206, Latvija*
***Rīgas Tehniskā Universitāte, Āzenes iela 14/24, LV-1048, Latvija*
****Latvijas Zinātņu Akadēmija Fizikālās Enerģētikas Institūts, Aizkraukles iela 21, LV-1006, Latvija, E-pasts: shipkovs@edi.lv*
*****Latvijas Universitāte Fizikas un Matemātikas Fakultāte, Zeļļu iela 8, Latvija. E-pasts: sf11053@lanet.lv*

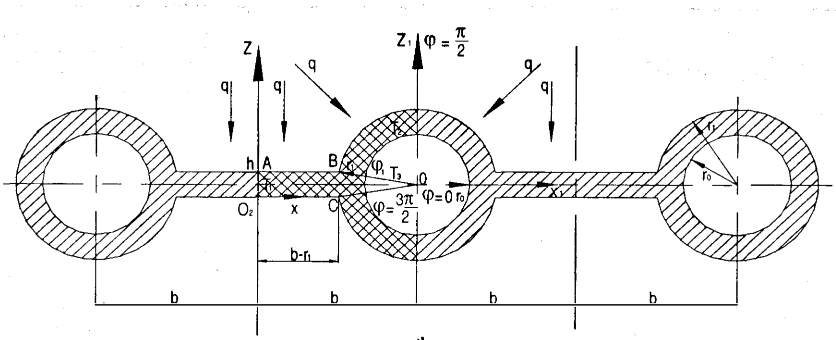
Annotation

The paper gives a mathematical description for the heat conduction proceeding on the plane surface of a solar collector's absorber dividend into three parts for each of which the Laolace equation with boundary conditions is formed. Applying definite approximations the authors have completely described mathematically the heat conduction process that begins in the plane part of a collector's absorber, than passes to a tube and from the tube to the liquid flowing through it. In all the three absorber's parts the process is considered nonstationary

Ievads

Šis raksts ir turpinājums rakstam, kas tika publicēts LJA 8. starptautiskajā konferencē „Plakanas virsmas saules kolektora fizikāli matemātiskie modeļi". Publicētajā rakstā pētīts siltumvadīšanas process saules kolektora absorberī uzskatot, ka process ir stacionārs. Šoreiz ir pētīts siltumvadīšanas process nestacionārā gadījumā ar mērķi pētīt pārejas procesus saules kolektora absorberī. Apskatam kolektora plates šķēlumu [1, 2], kas perpendikulārs šķidruma caurulīšu asīm. Šķēlumu nosacīti sadalām trīs daļās [1, 2]. Izvēlamies vienu posmu un tam piesaistam atbilstošu koordinātu sistēmu.

Temperatūru [K] platē apzīmēsim ar $T_1(x,z;\tau)$, temperatūru cilindriskajā apvalkā apzīmēsim ar $T_2(r,\phi;\tau)$ un temperatūru šķidrumā apzīmēsim ar $T_3(r,\phi,y;\tau)$. Analogas problēmas atsevišķiem apgabaliem apskatītas A.Temkina un viņa skolnieku darbos [3 -12].



1.att. Saules kolektora absorbera šķērsgriezums

Plate starp caurulēm

Darba uzdevums ir atrast temperatūras lauku saules kolektora absorbera posmā starp šķidruma caurulītēm. Šoreiz tiek uzskatīts, ka process ir nestacionārs un atkarīgs no laika. Laplasa vienādojums izskatās sekojoši [6]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

kur a ir ar dimensiju m^2/s.

Uzstāda sekojošus robežnosacījumus:

$$\lambda_{Cu}\frac{\partial T_1(x,h,\tau)}{\partial z} = q\,, \tag{2}$$

kur λ_{Cu} – siltumvadāmības koeficients varam un q ir absorbētais saules radiācijas blīvums. (2) attiecas uz virsmu, kad z koordināte ir vienāda ar plates biezumu h. Plates apakšā ir siltumizolācijas kārta, tādēļ var uzskatīt, ka uz apakšējās virsmas siltumapmaiņa nenotiek:

$$\frac{\partial T_1(x,0,\tau)}{\partial z} = 0\,. \tag{3}$$

Plates viduspunktā starp caurulītēm pēc simetrijas apsvērumiem izriet, ka siltuma plūsma ir 0:

$$\frac{\partial T_1(0,z,\tau)}{\partial x} = 0\,. \tag{4}$$

Vietā, kur plate pieskaras caurulītei, uzdod sekojošu robežnosacījumu:

$$h\lambda_{Cu}\frac{\partial T_1(b-r_1,z,\tau)}{\partial x} = -q(b-r_1)\,; \tag{5}$$

kur b ir attālums no plates centra starp caurulītēm līdz caurulītes centram un r_1 ir caurulītes ārējais diametrs. Laika atskaites sākumā pieņem, ka visos absorbera punktos temperatūra ieņem sākuma vērtību:

$$T_1(x,z,\tau) = T_0\,. \tag{6}$$

Lai atrisinātu (1) vienādojumu, izmantojot robežnosacījumus (2)-(6), ērti ir pāriet uz bezdimensionāliem lielumiem[13 -16]:

$$\begin{gathered}\Theta_1(\xi,\zeta,F) = \frac{T_1(x,z,\tau)}{}T_0\\ F = \frac{a\tau}{b^2}\\ Bi = \frac{xb}{\lambda}\end{gathered} \tag{7}$$

Viegli pārliecināties, ka visi trīs lielumi ir bezdimensionāli. F reprezentēs bezdimensionālu laiku un Θ_1 temperatūras lauku platē. Ieved arī koordināšu bezdimensionālos lielumus[1 - 2]:

$$\begin{array}{ll} \xi = \dfrac{x}{b} & \rho = \dfrac{r}{b} \\ \zeta = \dfrac{z}{b} & \rho_0 = \dfrac{r_0}{b} \\ \xi_1 = \dfrac{b-r_1}{b} & \rho_1 = \dfrac{r_1}{b} \\ \zeta_1 = \dfrac{h}{b} & \eta = \dfrac{y}{b} \end{array}, \tag{8}$$

kur r_0 ir caurulītes iekšējais rādiuss. Vēl divi bezdimensionāli lielumi:

$$Q = \frac{qb}{\lambda_{Cu} T_0} \qquad \overline{Q} = \frac{qb(b - r_1)}{\lambda_{Cu} h T_0} \tag{9}$$

Pārrakstot Laplasa vienādojumu (1) un robežnosacījumus (2)-(6) bezdimensionālā formā, iegūst sekojošu rezultātu:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial F} = \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \zeta^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi, \zeta_1 F)}{\partial \zeta} = Q \tag{11}$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi, 0, F)}{\partial \zeta} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, \zeta, F)}{\partial \xi} = -\overline{Q} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \Theta_1(0, \zeta, F)}{\partial \xi} = 0 \tag{14}$$

$$\Theta_1(\xi, \zeta, 0) = 0 \tag{15}$$

Lai atrisinātu diferenciālvienādojumu, izmanto operatora metodi ieviešot operatoru p [17 - 25]

$$\Theta_1^*(\xi, \zeta, p) = \int_0^\infty e^{-pF} \Theta_1(\xi, \zeta, F) dF \tag{16}$$

$$\Theta_1^*(\xi, \zeta, F) = \Theta_1(\xi, \zeta, p) \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi, \zeta, F)}{\partial F} = p\Theta_1^*(\xi, \zeta, p) - \Theta_1(\xi, \zeta, 0) = p\Theta_1^*(\xi, \zeta, p) \tag{18}$$

Vēlreiz pārraksta Laplasa vienādojumu un robežnosacījumus, izmantojot sakarību (18):

$$p\Theta_1^*(\xi, \zeta, p) = \frac{\partial^2 \Theta_1^*(\xi, \zeta, p)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1^*(\xi, \zeta, p)}{\partial \zeta^2} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Theta_1^*(\xi, \zeta_1, p)}{\partial \zeta_1} = \frac{Q}{p} \tag{20}$$

$$\frac{\partial \Theta_1^*(\xi, 0, p)}{\partial \zeta} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Theta_1^*(0, \zeta, P)}{\partial \xi} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Theta_1^*(\xi_1, \zeta, p)}{\partial \xi} = -\frac{Q}{p} \tag{23}$$

Redzams, ka no trim diferenciāļiem ir pāriets uz diviem un pietiek robežnosacījumu, lai dif-vienādojumu varētu atrisināt.Θ_1^* sadala divās komponentēs (19) [17 - 20]:

$$\Theta_1^* = \Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(2)} \qquad (24)$$

$$p\Theta_1^{(1)} = \frac{\partial^2 \Theta_1^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1^{(1)}}{\partial \zeta^2} \qquad (25)$$

$$p\Theta_1^{(2)} = \frac{\partial^2 \Theta_1^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1^{(2)}}{\partial \zeta^2} \qquad (26)$$

Tālāk atrisina katru komponenti atsevišķi. Neiedziļinoties risināšanas gaitā, tiek doti tikai komponenšu atrisinājumi:

$$\Theta_1^{(1)}(\xi,\zeta,p) = -\overline{Q}\frac{ch\sqrt{p}\xi}{p\sqrt{p}sh\sqrt{p}\xi_1}$$
$$\Theta_1^{(2)}(\xi,\zeta,p) = Q\frac{ch\sqrt{p}\zeta}{p\sqrt{p}sh\sqrt{p}\zeta_1} \qquad (27)\ (28)$$

Ieliekot (24) sakarībā atrastās komponentes (27) un (28), iegūst:

$$\Theta_1^*(\xi,\zeta,p) = Q\frac{ch\sqrt{p}\zeta}{p\sqrt{p}sh\sqrt{p}\zeta_1} - \overline{Q}\frac{ch\sqrt{p}\xi}{p\sqrt{p}sh\sqrt{p}\xi_1} \qquad (29)$$

Ievērojot, ka $\overline{Q} = Q\frac{b-r_1}{h}$, uzraksta (29) šādā formā [23]-[25]:

$$\Theta_1^*(\xi,\zeta,p) = Q\frac{1}{p}\left(\frac{ch\sqrt{p}\zeta}{\sqrt{p}sh\sqrt{p}\zeta_1} - \frac{b-r_1}{h}\frac{ch\sqrt{p}\xi}{\sqrt{p}sh\sqrt{p}\xi_1}\right) \qquad (30)$$

Turpmākā risināšanas gaitā ir jāatgriežas no operatora p uz bezdimensionālo laiku F. Tātad jāatrod :

$$F(P) = \frac{ch\sqrt{p}\zeta}{\sqrt{p}sh\sqrt{p}\zeta_1} = f_\zeta(F)$$
$$\Gamma(p) = \frac{ch\sqrt{p}\xi}{\sqrt{p}sh\sqrt{p}\xi_1} = f_\xi(F) \qquad (31)$$

Sadalot katru funkciju divās daļās, saucējā un skaitītājā, izvirzot saucēju rindā un pielīdzinot nullei, atrod sakarības starp abām funkcijām:

$$f_\zeta(F) = \frac{1}{\zeta_1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cos k\pi\frac{\zeta}{\zeta_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\zeta_1}\right)F}\right) \qquad (32)$$

$$f_\xi(F) = \frac{1}{\xi_1}\left(1 + 2\sum(-1)^k \cos k\pi\frac{\xi}{\xi_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\xi_1}\right)^2 F}\right) \qquad (33)$$

(30) izteiksmē iekavās esošais reizinātājs tagad tiek pārrakstīts, izmantojot (32) un (33):

$$\left(\frac{ch\sqrt{p}\zeta}{\sqrt{p}sh\sqrt{p}\zeta_1}-\frac{b-r_1}{b}\frac{ch\sqrt{p}\xi}{\sqrt{p}sh\sqrt{p}\xi_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\zeta_1}\left(2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos k\pi\frac{\zeta}{\zeta_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\zeta_1}\right)^2F}-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos k\pi\frac{\xi}{\xi_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\xi}\right)^2F}\right) \quad (34)$$

Ievērojot, ka:

$$\frac{1}{p}F(p)=\int_0^t f(\tau)d\tau \quad (35)$$

Seko no (30), (34) un (35), ka:

$$\Theta_1(\xi,\zeta,F)=2Q\frac{1}{\zeta_1}\int_0^F\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos k\pi\frac{\zeta}{\zeta_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\zeta_1}\right)^2\tau}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos k\pi\frac{\xi}{\xi_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\xi_1}\right)^2\tau}\right)d\tau \quad (36)$$

Un atrisinot integrāli, iegūst bezdimensionālu temperatūras lauku platē:

$$\Theta_1(\xi,\zeta,F)=2Q\frac{1}{\zeta_1}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k\pi)^2}\cos k\pi\frac{\zeta}{\zeta_1}\left(1-e^{-\left(\frac{k\pi}{\zeta_1}\right)^2F}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos k\pi\frac{\xi}{\xi_1}\left(1-e^{-\left(\frac{k\pi}{\xi_1}\right)^2F}\right)\frac{\xi_1^2}{(k\pi)^2}\right)\right) \quad (37)$$

Izmantojot pārejas izteiksmi temperatūrai no bezdimensionāla lieluma uz dimensionālu un pārveidojot rindu, iegūst:

$$T_1(\xi,\zeta,F)=T_0+$$

$$T_0Q\frac{2}{\zeta_1}\left(\frac{\xi_1^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi\frac{\zeta}{\zeta_1}\left(1-e^{-\left(\frac{k\pi}{\zeta_1}\right)^2F}\right)-\frac{\xi_1^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi\frac{\xi}{\xi_1}\left(1-e^{-\left(\frac{k\pi}{\xi_1}\right)^2F}\right)\right)) \quad (38)$$

Ja F tuvojas bezgalībai, jeb iestājas stacionārs process, temperatūras lauks izskatās sekojošs:

$$T_1(\xi,\zeta)=\frac{1}{2\zeta_1}T_0Q(\zeta^2-\xi^2)+T_0\left(1-\frac{1}{6\zeta_1}Q(\zeta_1^2-\xi_1^2)\right) \quad (39)$$

Izmantojot (37) un (39), pārejot uz bezdimensionāliem lielumiem, iegūst temperatūras lauku platē starp caurulītēm:

$$\Theta_1((\xi,\zeta,F)=\frac{1}{2\zeta_1}Q(\zeta^2-\xi^2)-\frac{1}{6\zeta_1}Q(\zeta_1^2-\xi_1^2)+$$

$$+\frac{2}{\pi^2\zeta_1}Q\left(\xi_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi\frac{\xi}{\xi_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\xi_1}\right)^2F}-\zeta_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi\frac{\zeta}{\zeta_1}e^{-\left(\frac{k\pi}{\zeta_1}\right)^2F}\right) \quad (40)$$

Temperatūras lauks caurulītes apvalkā

Temperatūras lauks cilindriskajā caurules apvalkā tiks risināts polārajās koordinātēs ar koordināšu sākumpunktu caurules centrā O_1 [1 - 2]. Laplasa vienādojums polārajās koordinātēs nestacionāram siltumvadīšanas procesam izskatās sekojošs:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a\left(\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2}\right)\right) \qquad (41)$$

T_2 izteiksmē (41) jāsaprot kā atkarīgu no trim koordinātēm $T_2(r,\varphi,\tau)$. Robežnosacījumus uzraksta sekojoši:

Tā kā var uzskatīt, ka caurule ir simetriska vertikāli novilktai asij caur centru, uzdevums tiks atrisināts, ja izrēķinās temperatūras lauku tikai vienā pusē simetrijas asij. Tādēļ, leņķim mainoties no $\pi/2$ līdz $\pi-\varphi_1$ uz caurulītes augšējās virsmas, kad $r=r_1$, kur r_1 – caurulītes ārējais diametrs, robežnosacījums izskatās sekojoši:

$$\lambda_{Cu}\frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = q \qquad (42)$$

Apakšējā caurulītes virsma, leņķim mainoties no $\pi+\varphi_1$ līdz $3\pi/2$, ir izolēta, tādēļ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = 0 \qquad (43)$$

Segmentā, kur caurulīte ir kontaktā ar plati, temperatūras laukam ir jābūt vienādam ar platē esošo temperatūras lauku jeb siltuma plūsmām caur šo segmentu kontakta vietā ir jābūt vienādām. Tādēļ var uzrakstīt sekojošu robežnosacījumu:

$$\frac{\partial T_2(r_1,\varphi,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial T_1(b-r_1,\varphi,\tau)}{\partial r}$$
$$\pi+\varphi_1 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \qquad (44)$$

Caurulītes apvalka iekšpuse ir kontaktā ar dzesējošo šķidrumu, tādēļ siltumapmaiņu plūstošajā šķidrumā apraksta Ņūtona likums:

$$\lambda_{Cu}\frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = -\alpha(T_3 - T_2)\big|_{r=r_0} \qquad (45)$$

Šeit T_3 ir temperatūras lauks dzesējošajā šķidrumā.
Jāpiemin vēl fakts, ka:

$$T_2(r,\varphi+2\pi,\tau) = T_2(r,\varphi,\tau)$$
$$T_2(r,\pi/2-\varphi,\tau) = T_2(r,\pi/2+\varphi,\tau) \qquad (46)$$

Procesa sākuma momentā uzskata, ka temperatūra T_0 visos punktos ir vienāda:

$$T_2(r,\varphi,0) = T_0 \qquad (47)$$

Izsaka Laplasa vienādojumu un robežnosacījumus bezdimensionālā formā:

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Theta_2}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\phi^2}$$
$$\rho_0 \le \rho \le \rho_1; 0 \le \phi \le 2\pi; 0 \le F \le +\infty \qquad (48)$$

$$\frac{\partial\Theta_2(\rho_1,\phi,F)}{\partial\rho}=Q \qquad (49)$$
$$\phi_1\le\phi\le\pi-\phi_1$$

$$\frac{\partial\Theta_2(\rho_1,\phi,F)}{\partial\rho}=0 \qquad (50)$$
$$\pi+\phi_1\le\phi\le 2\pi-\phi_1$$

$$\Theta_1(\xi_1,\zeta,F)=\Theta_2(\rho_1,\phi,F) \qquad (51)$$
$$\pi-\phi_1\le\phi\le\pi+\phi_1$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Theta_1(\xi_1,\zeta,F)=\frac{\partial}{\partial\rho}\Theta_2(\rho_1,\phi,F) \qquad (52)$$
$$(\pi-\phi_1\le\phi\le\pi+\phi_1)$$

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}=-Bi(\Theta_3-\Theta_2)\big|_{\rho=\rho_0} \qquad (53)$$

$$\Theta_2(\rho,\phi,0)=0 \qquad (54)$$

Neiedziļinoties risināšanas gaitā, tiks dots atrisinājums. Temperatūras lauka atrisinājums caurules apvalkā tiek sadalīts divās daļās:

$$\Theta_2(\rho,\phi,F)=\overline{\Theta}_2(\rho,\phi,F)-\Theta_2(\rho,\phi)\ , \qquad (55)$$

kur pirmā atrisinājuma daļa ir atkarīga no laika un otrā daļa nav atkarīga no laika, kad process nostabilizējies un kļuvis stacionārs. Otrās daļas atrisinājums:

$$\Theta_2(\rho,\phi)=A_0+B_0\ln\rho+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\rho^k+\frac{B_k}{\rho^k}\right)\cos k\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (56)$$

Koeficienti ir noteikti savādāk kā [4] un [5]. Šeit tiek izmantots izvirzījums Furjē rindā funkcijai ar periodu T = 2π:

$$A_0=\frac{1}{2\zeta_1}Q\left(\frac{1}{3}(\rho_1^2-1)-(\zeta_1^2+1)\right)-B_0\ln\rho_1 \qquad (57)$$

$$B_0=Q\frac{\rho_1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\phi_1-\cos\phi_1\right) \qquad (58)$$

$$A_1=\frac{1}{2\pi}Q\left(\phi_1-\frac{1}{2}\sin 2\phi_1+2\cos\phi_1+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (59)$$

$$B_1=\rho_1^2\left(\frac{1}{2}Q-A_1\right) \qquad (60)$$

$$A_2=\frac{1}{2\pi}Q\left(\phi_1+\frac{1}{4}\sin 4\phi_1+\frac{1}{2\rho_1}\cos\phi_1+\frac{\pi}{2\zeta_1}\right) \qquad (61)$$

$$A_k = Q\frac{\rho_1^{1-k}}{k\pi}\left(\begin{array}{l}\frac{\sin k(0{,}5\pi-\phi_1)}{k}- \\ -\rho_1\cos k\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin(k+2)\phi_1}{k+2}+\frac{\sin(k-2)\phi_1}{k-2}\right)- \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{\sin(k+1)\phi_1}{k+1}-\frac{\sin(k-1)\phi_1}{k-1}\right)\end{array}\right) \tag{62}$$

$$B_k = -A_k\rho_1^{2k} \tag{63}$$

(62) un (63) izmantojami, kad $k \geq 3$.
Otrā atrisinājuma daļa ir sekojoša [17 - 20]:

$$\overline{\Theta}_2(\rho,\phi,F) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m}W_0(\nu_m\rho)e^{-\nu_m^2F} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{km}W_k(\nu_m\rho)\cos k\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)e^{-\nu_m^2F} \tag{64}$$

kur

$$W_k(\nu_m\rho) = \frac{J_k(\nu_m\rho)}{J_k'(\nu_m\rho_1)} - \frac{Y_k(\nu_m\rho)}{Y_k'(\nu_m\rho_1)}, \tag{65}$$

Bet ν_m ir raksturīgā vienādojuma pozitīvās saknes [21 - 22]:

$$Y_k'(\nu_m\rho_1)\left[\nu_m J_k'(\nu_m\rho_0) - BiJ_k(\nu_m\rho_0)\right] - J_k'(\nu_m\rho_1)\left[\nu_m Y_k'(\nu_m\rho_0) - BiY_k(\nu_m\rho_0)\right] = 0 \tag{66}$$

Rindas (64) koeficienti šeit netiek doti, bet tos var iegūt, izmantojot sākuma nosacījumus.

Temperatūras lauks šķidrumā

Temperatūru lauku caurulē plūstošajā šķidrumā apraksta ar vienādojumu [13 - 16]:

$$c\frac{DT_3}{d\tau} = \lambda_0\nabla^2 T_3; \tag{67}$$

$$0 \leq r \leq r_0; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi; \quad 0 \leq y \leq y_1; \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Izmantojam cilindrisko koordinātu sistēmu, kur Oy-ass sakrīt ar cilindra caurules asi. Laplasa operātoru, temperatūru gradientu un ātruma vektoru izsaka ar formulām:

$$\nabla^2 T_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_3}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_3}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}, \tag{68}$$

$$\nabla T_3 = \frac{\partial T_3}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T_3}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial T_3}{\partial y}\vec{e}_y; \tag{69}$$

$$\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\phi\vec{e}_\phi + u_y\vec{e}_y. \tag{70}$$

Konvektīvais atvasinājums izsakās ar skalāro reizinājumu:

$$\frac{DT_3}{d\tau} = \frac{\partial T_3}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \nabla T_3 \quad , \tag{71}$$

Pieņemot, ka $u_r = u_\phi = 0$; $u_y = u$, no (67) iegūst:

$$c\left(\frac{\partial T_3}{\partial \tau} + u\frac{\partial T_3}{\partial y}\right) = \lambda_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_3}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_3}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2}\right]. \tag{72}$$

$0 \le r \le r_0$; $0 \le \phi \le 2\pi$; $0 \le y \le y_1$; $0 \le \tau < +\infty$.

Saskaņā ar Ņūtona likumu, uz caurules un šķidruma saskares virsmas $r = r_0$ izpildās vienādība:

$$\lambda \frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = -\alpha(T_3 - T_2)\big|_{r=r_0}. \tag{73}$$

Nosakam temperatūru divos fiksētos caurules punktos y = 0 un y = y_1:

$$T_3(r,\phi,0;\tau) = T_{3,0}; \qquad T_3(r,\phi,y_1;\tau) = T_{3,1}. \tag{74}$$

Temperatūra visos punktos ir galīga

$$T_3(0,\phi,y;\tau) < +\infty; \qquad T_3(r,\phi,+\infty;\tau) < +\infty. \tag{75}$$

Sākuma temperatūra T_0 momentā $\tau = 0$:

$$T_3(r,\phi,y;0) = T_0. \tag{76}$$

Pārejot vienādojumā (72) un robežnosacījumos uz bezdimensionālajiem mainīgajiem, iegūst:

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial F} + Pe\frac{\partial \Theta_3}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Theta_3}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial \eta^2}; \tag{77}$$

$0 \le \rho \le \rho_0$; $0 \le \phi \le 2\pi$; $0 \le \eta \le \eta_1$; $0 \le F < +\infty$.

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} = -Bi(\Theta_3 - \Theta_2)\big|_{\rho=\rho_0}; \tag{78}$$

$$\Theta_3(\rho,\phi,0;F) = \frac{T_{3,0}}{T_0} - 1 = \Theta_{3,0}; \qquad \Theta_3(\rho,\phi,\eta_1;F) = \frac{T_{3,0}}{T_0} - 1 = \Theta_{3,0} \tag{79}$$

$$\Theta_3(\rho,\phi,\eta;0) = 0. \tag{80}$$

Problēmu sadalām divās daļās. Atrisinājumu $\Theta_3(\rho,\phi,\eta;F)$ izsakām kā divu atrisinājumu summu:

$$\Theta_3(\rho,\phi,\eta;F) = \overline{\Theta}_3(\rho,\phi,\eta;F) - \Theta_3(\rho,\phi,\eta). \tag{81}$$

Funkcija $\Theta_3(\rho,\phi,\eta)$ ir stacionārā vienādojuma , bet funkcija $\overline{\Theta}_3(\rho,\phi,\eta;F)$ ir nestacionārā vienādojuma atrisinājums.

Funkcija $\Theta_3(\rho,\phi,\eta)$ apmierina vienādojumu

$$Pe\frac{\partial\Theta_3}{\partial\eta}=\frac{\partial^2\Theta_3}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Theta_3}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Theta_3}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Theta_3}{\partial\eta^2}; \tag{82}$$

$$0\le\rho\le\rho_0;\quad 0\le\phi\le 2\pi;\quad 0\le\eta\le\eta_1.$$

ar dotajiem robežnosacījumiem (78),(79).

Funkciju $\Theta_3(\rho,\phi,\eta)$ sadala trīs komponentēs [8 , 9]:

$$\Theta_3(\rho,\phi,\eta)=\Theta_3^{(1)}(\rho,\phi,\eta)+\Theta_3^{(2)}(\rho,\phi,\eta)+\Theta_3^{(3)}(\rho,\phi,\eta), \tag{83}$$

kas katra apmierina vienādojumu (82) un šādus robežnosacījumus:

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}=-Bi\left(\Theta_3^{(1)}-\Theta_2\right)\Big|_{\rho=\rho_0}; \tag{84}$$

$$\Theta_3^{(1)}(\rho,\phi,0)=0;\qquad \Theta_3^{(1)}(\rho,\phi,\eta_1)=0. \tag{85}$$

$$\Theta_3^{(2)}(\rho_0,\phi,\eta)=0; \tag{86}$$

$$\Theta_3^{(2)}(\rho,\phi,\eta_1)=\Theta_{3,1};\qquad \Theta_3^{(2)}(\rho,\phi,0)=0. \tag{87}$$

$$\Theta_3^{(3)}(\rho_0,\phi,\eta)=0; \tag{88}$$

$$\Theta_3^{(3)}(\rho,\phi,0)=\Theta_{3,0};\qquad \Theta_3^{(3)}(\rho,\phi,\eta_1)=0. \tag{90}$$

Ar Furjē mainīgo atdalīšanas metodi [17 - 20], izmantojot robežnosacījumus, iegūst:

$$\Theta_3^{(1)}(\rho,\phi,\eta)=e^{\frac{Pe}{2}\eta}\sum_{m=1}^{\infty}C_{0m}I_0(\mu_m\rho)\sin\frac{m\pi}{\eta_1}\eta+$$

$$+e^{\frac{Pe}{2}\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{km}\cos k\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)I_k(\mu_m\rho)\sin\frac{m\pi}{\eta_1}\eta, \tag{91}$$

kur koeficientus aprēķina pēc formulām:

$$C_{0m}=\left(\frac{B_0}{\rho_0}-Bi(A_0+B_0\ln\rho_0)\right)\frac{2m\pi}{\eta_1^2\mu_m^2}\frac{\left[(-1)^m e^{-\frac{Pe}{2}\eta_1}-1\right]}{BiI_0(\mu_m\rho_0)}; \tag{92}$$

$$C_{km}=\left[A_m\rho_0^m(m-Bi)-\frac{B_m}{\rho_0^m}(m+Bi)\right]\frac{2m\pi}{\eta_1^2\mu_m^2}\frac{\left[(-1)^m e^{-\frac{Pe}{2}\eta_1}-1\right]}{BiI_k(\mu_m\rho_0)} \tag{93}$$

kur A_0,B_0, A_1,B_1, A_2,B_2, A_m,B_m, ja $m\ge3$, aprēķināti jau iepriekšs[1]-[2]:

$$\Theta_3^{(2)}(\rho,\phi,\eta)=\frac{2}{\rho_0}Q_{3,1}e^{\frac{Pe}{2}(\eta-\eta_1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_m}\frac{sh\gamma_m\eta}{sh\gamma_m\eta_1}\frac{J_0(\nu_m\rho)}{J_1(\nu_m\rho_0)}; \tag{94}$$

$$\Theta_3^{(3)}(\rho,\phi,\eta)=\frac{2}{\rho_0}Q_{3,0}e^{\frac{Pe}{2}\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_m}\frac{sh\gamma_m(\eta_1-\eta)}{sh\gamma_m\eta_1}\frac{J_0(\nu_m\rho)}{J_1(\nu_m\rho_0)}, \tag{95}$$

kur

$$\mu_m^2 = \left(\frac{m\pi}{\eta_1}\right)^2 + \left(\frac{Pe}{2}\right)^2, \ \gamma_m^2 = \left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + \mu_m^2, \qquad (96)$$

bet $J_k(x)$ ir Beseļa funkcija ar kārtu k un $J_k(\nu_m \rho_0) = 0$;

$I_k(x)$ ir modificētā Beseļa funkcija ar kārtu k.

Funkcija $\overline{\Theta}_3(\rho,\phi,\eta;F)$ apmierina vienādojumu

$$\frac{\partial \overline{\Theta}_3}{\partial F} + Pe\frac{\partial \overline{\Theta}_3}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \overline{\Theta}_3}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\Theta}_3}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \overline{\Theta}_3}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Theta}_3}{\partial \eta^2}; \qquad (97)$$

$$0 \le \rho \le \rho_0; \quad 0 \le \phi \le 2\pi; \quad 0 \le \eta \le \eta_1; \quad 0 \le F < +\infty.$$

homogēnos robežnosacījumus:

$$\overline{\Theta}_3(\rho_0,\phi,\eta;F) = 0; \quad \overline{\Theta}_3(\rho,\phi,0;F) = 0; \quad \overline{\Theta}_3(\rho,\phi,\eta_1;F) = 0, \ (98)$$

un sākuma nosacījumu:

$$\overline{\Theta}_3(\rho,\phi,\eta;0) = \Theta_2(\rho,\phi,\eta). \qquad (99)$$

Ar Furjē mainīgo atdalīšanas metodi [17 - 20] iegūst [1 , 2]:

$$\overline{\Theta}_3(\rho,\phi,\eta;F) = e^{\frac{Pe}{2}\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{omn} J_0(\nu_m \rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\eta_1}\eta\right)e^{-\mu_{n,m}^2 F} +$$

$$+ e^{\frac{Pe}{2}\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{kmn}\cos k\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)J_k(\nu_m \rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\eta_1}\eta\right)e^{-\mu_{n,m}^2 F},$$

(100)

kur koeficientus aprēķina pēc formulām:

$$C_{0mn} = C_{0m}\int_0^{\rho_0}\rho I_0(\mu_{mn}\rho)J_0(\nu_m\rho)d\rho - \qquad (101)$$

$$-\frac{4}{\pi\rho_0}\left(\Theta_{3,0} + (-1)^m \Theta_{3,1} e^{-\frac{Pe}{2}\eta_1}\right)\frac{m}{\nu_m(n^2+m^2)J_1(\nu_m\rho_0)};$$

$$C_{kmn} = \frac{2C_{km}}{\rho_0^2 J_{k+1}^2(\nu_m\rho_0)}\int_0^{\rho_0}\rho I_k(\mu_{mn}\rho)J_k(\nu_m\rho)d\rho; \qquad (102)$$

$$\mu_{mn}^2 = \left(\frac{n\pi}{\eta_1}\right)^2 + \left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + \nu_m^2 \quad . \qquad (103)$$

Integrāļus aprēķina atsevišķi [24]:

$$\int_0^{\rho_0}\rho J_0(\nu_m\rho)I_0(\mu_{mn})d\rho = \frac{\rho_0\nu_m}{\mu_{m,n}^2 + \nu_m^2}J_1(\nu_m\rho_0)I_0(\mu_{mn}\rho_0); \qquad (104)$$

$$\int_0^{\rho_0}\rho J_k(\nu_m\rho)I_k(\mu_{mn})d\rho = \frac{\rho_0\nu_m}{\mu_{mn}^2 + \nu_m^2}J_{k+1}(\nu_m\rho_0)I_k(\mu_{mn}\rho_0). \qquad (105)$$

Kopsavilkums

Ar aprakstīto matemātisko modeli ir beidzies pirmais posms mūsu pētījumā par saules kolektora siltumvadīšanas procesu absorberī. Iegūtie temperatūras lauki tālāk tiks izmantoti kolektora optimizēšanai. Nestacionāra siltumvadīšanas procesa aprēķins ir ļoti nozīmīgs, lai varētu pētīt pārejas procesus saules kolektorā. Kolektors ir jāpadara pietiekoši ātri uzsilstošs, lai varētu izmantot to arī dienā, kad saule parādās visai reti. Turpmākajos mūsu pētījumos tiks izmantota matemātiskā datormodeļa veidošanā ar COMSOL 3.3 datorprogrammas palīdzību.

Literatūra

1. **A.Temkins, V. Barkāns, P. Shipkovs, M. Vanags, K. Lebedeva, J. Shipkovs.** Heat Conduction Process on Plane Surface of a Solar Collector Absorber: the Mathematical Deserption. Latvian Journal of Physics and Technical Sciences, 2005-6, 3-15 p.
2. **V. Barkāns, Ā. Temkins, P. Šipkovs, G. Kaškarova, M. Vanags, K. Ļebedeva, J. Šipkovs.** Plakanas virsmas saules kolektora fizikāli matemātiskie modeļi. Latvijas Jūras akadēmija, 8. Starptautiskā konference, Ūdens transports un infrastruktūra, 2006, 130-137.
3. **A.Temkins, J. Gerhards, I. Iltiņš.** The Temperature Field of Cable Insulation. Latvian Journal of Physics and Technical Sciences, 2005-2, 12-16.
4. **A.Temkins.** Physical and Geometrical Decomposition of Temperature Field. Latvian Journal of Physics and Technical Sciences, 2001-2, 3-18.
5. **A.Temkins, V.Barkāns.** Cilindriska ķermeņa temperatūru lauks un vispārinātās K.Jakobi funkcijas. Latvijas fizikas un tehnisko zinātņu žurnāls, 1995-4,65-67.
6. **A.Temkins, V.Barkāns.** Cilindriska un plakana ķermeņa siltumvadāmības problēmu kopīgs atrisinājums un raksturīgie skaitļi. Latvijas fizikas un tehnisko zinātņu žurnāls, 1995-4,68-74.
7. **А.Г.Темкин.** Обратные методы теплопроводности. Москва, Энергия, 1973, 464 стр.
8. **А.Г.Темкин**. Обобщенный ряд Тэйлора и теорема умножения изображений. В. Кн. Сборник научных трудов, Куйбышев, Куйбышевский Индустриальный институт, вып. 6, кн. 2.
9. **А.Г.Темкин.** Инерция температурных полей. Минск, ИФЖ, 1959-9,
10. **А.Г.Темкин**. Инерция температурных полей. Минск, ИФЖ, 1960-1.
11. **А.Г.Темкин**. Обратные задачи теплопроводности ассимметричного поля. Минск, ИФЖ, 1961-11.
12. **В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел**. Теплопередача. Москва, Энергия, 1969, 724 стр.
13. **А.В.Лыков**. Тепломассообмен. Москва, Энергия, 1972, 560 стр.
14. **А.В .Лыков**. Теория теплопроводности. Москва, Высшая школа, 1967, 600 стр.
15. **С.И.Исаев, И.Кожинов, В.И.Кофанов и др**. Теория тепломассообмена. Москва, Высшая школа, 1979, 496 стр.
16. **E.Riekstiņš**. Matematiskās fizikas metodes. Rīga, Zvaigzne, 1969, 620 lpp.
17. **Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов**. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Москва, Физматгиз, 1962, 768 стр.
18. **А.Н.Тихонов, А.А.Самарский.** Уравнения математической физики. Москва, Наука,1956, 724 стр.
19. **Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов**. Сборник задач по математической физике. Москва, Наука, 1972, 688 стр.
20. **Э. Грей, Г.Б. Метьюз.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Москва, Издательство ИЛ, 1953, 372 стр.
21. **Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш.** Специальные функции. Москва, Наука, 1968, 344 стр.
22. **И.С.Градштейн, И.М.Рыжик.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1963, 1100 стр.
23. **А.П. Прудников, Ю.А. Бычков, О.И. Маричев.** Интегралы и ряды. Специальные функции. Москва, Наука, 1983, 750 стр.
24. **М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат**. Методы теории функций комплексного переменного. Москва, Физматгиз, 1958, 680 стр.