НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО СТРОИТЕЛЬНОЙ ИНДУСТРИИ
ЦЕНТРАЛЬНОЕ И ЛАТВИЙСКОЕ РЕСПУБЛИКАНСКИЕ ПРАВЛЕНИЯ
МИНИСТЕРСТВО ПРОМЫШЛЕННОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ СССР
МИНИСТЕРСТВО СТРОИТЕЛЬСТВА ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ЦК ПРОФСОЮЗА РАБОЧИХ СТРОИТЕЛЬСТВА И ПРОМЫШЛЕННОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
НИИЖБ ГОССТРОЯ СССР — ВНИИЖЕЛЕЗОБЕТОН МПСМ СССР

VI КОНФЕРЕНЦИЯ ПО БЕТОНУ И ЖЕЛЕЗОБЕТОНУ

Материалы секций конференции, подготовленные Латвийским, Литовским и Эстонским правлениями научно-технического общества строительной индустрии

РИГА 1966

А. СКУДРА, К. РОЦЕНС

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННЫХ УПРУГО-ВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ

Типичным примером дисперсно армированного упруго-вязкого материала является армоцемент. Для расчета армоцементных конструкций необходимо знать его деформативные характеристики. В настоящее время эти характеристики еще исследованы крайне недостаточно, что сильно задерживает внедрение этого прогрессивного материала. В общем случае как цементный раствор так и арматура оба могут быть упруго-вязкими материалами. Примером упруго-вязкой арматуры является стеклопластиковая арматура [1, 2, 3, 5]. Частным, вытекающим из общего случая является случай армирования упругой (например стальной) арматуры.

Под техническими деформативными характеристиками будем понимать модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона. В связи с большой актуальностью, вопрос определения деформативных характеристик армированных материалов в последнее время все больше и больше привлекает внимание исследователей. В настоящее время наиболее обширные исследования в этом направлении выполнены Г. А. Ван Фо Фы, Хашиным и Розеным, А. Л. Рабиновичем и другими [4, 8, 12].

Для упругих материалов деформативные характеристики являются постоянными величинами. В случае упруго-вязких материалов, деформации которых зависят от длительности действия нагрузки, эти постоянные характеристики должны быть заменены соответствующими временными операторами. Основной целью настоящей работы является определение временных операторов, эквивалентных модулям упругости, модулям сдвига и коэффициентам Пуассона, которые необходимы для решения плоской задачи.

Для составления соответствующих зависимостей, сначала необходимо принять законы деформирования арматуры и связущего, которые в общем случае оба могут быть упруго-вязкими.

Для упруго-вязких материалов в качестве закона деформирования могут быть использованы интегральные уравнения Больцмана-Волтерра и также дифференциальные уравнения соответствующие различным механическим моделям. Из уравнений последнего типа наиболее широкое применение нашло уравнение так называемого «типичного тела»:

$$nH\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma + n\dot{\sigma} \qquad (1)$$

где H и E модули мгновенной и длительной упругости,
n — коэффициент времени релаксации.

Более подробно закон (1) исследован в работах А. Ю. Ишлинского [6, 7] и А. Р. Ржаницына [9].

Для определения соответствующих операторов составного материала будем часто пользоваться так называемым «методом суммирования», в основе которого лежит следующее уравнение

$$x = \frac{1}{F}\sum_{1}^{m} x_i F_i k_i$$

где x — искомая характеристика составного материала,
x_i — соответствующая характеристика «i»-ой компоненты,
F и F_i — площади поперечного сечения составного материала и «i»-ой компоненты,
k_i — коэффициенты условий работы, которых в первом приближении будем принимать равными единице.

Закон деформации упруго-вязкого материала может быть написан в виде следующего операторного уравнения

$$P\sigma = Q\varepsilon, \qquad (2)$$

где

$$P = a_1 + a_2 \frac{d}{dt} + a_3 \frac{d^2}{dt^2} + \ldots\ldots$$

$$Q = b_1 + b_2 \frac{d}{dt} + b_3 \frac{d^2}{dt^2} + \ldots\ldots$$

Если упруго-вязкий материал деформируется согласно (1), тогда

$$P = 1 + n \frac{d}{dt}$$

$$Q = E + nH \frac{d}{dt}$$

Из зависимости (2) следует, что оператор эквивалентный модулю упругости имеет вид

$$E^* = \frac{Q}{P}.$$

Обозначая деформативные характеристики армируемого полимера индексами «А» и арматуры индексами «В» получаем

$$E_A^* = \frac{Q_A}{P_A};\ E_B^* = \frac{Q_B}{P_B}. \qquad (3)$$

Учитывая зависимость (3) и пользуясь законам суммирования, в случае однонаправленного армирования, получаем следующий оператор эквивалентный модулю упругости в направлении армирования «к»

$$E_{kk}^* = \frac{P_B Q_A + \mu_k Q_B P_A}{(1 + \mu_k) P_A P_B}, \qquad (4)$$

где $\mu_k = \frac{F_B}{F_A}$ — коэффициент армирования в направлении «к».

В (4) первый индекс при E_{kk}^* указывает на направление арматуры, а второй на направление действия силы. К такому содержанию индексов к деформативным характеристикам будем придерживаться и в дальнейшем.

Если законы нагружения и деформирования заданы, тогда можно раскрыть дифференциальный оператор (4) и получить конкретное выражение для оператора, например,

в случае постоянной нагрузки при условии, что оба компонента следуют закону (1), оператор раскрыт в работе [10].

Для определения оператора модуля упругости перпендикулярно направлению армирования, рассмотрим случай, когда нагрузка приложена в направлении оси «L».

Используя метод суммирования получаем:

$$\frac{1}{E_{KL}^*} = \left(\frac{1}{E'^*} + \frac{1}{E''^*}\right)\frac{1}{2} - \left[\frac{\nu_A^*}{E_A^{**}}\left(1 - \frac{\mu_k}{1 + \mu_k}\right) - \frac{\nu_B^*}{E_B^{**}} \cdot \frac{1}{1 + \mu_k}\right] \qquad (5)$$

где $E_k'^*$ и E''^* — операторы модулей упругости моделей Рейса и Фойгта

$$\nu_A^* = \left[\frac{\nu_A^0}{H_A} + \left(\frac{P_A}{Q_A} - \frac{1}{H_A}\right)\frac{1}{2}\right]\frac{Q_A}{P_A}$$

$$\nu_B^* = \left[\frac{\nu_B^0}{H_B} + \left(\frac{P_B}{Q_B} - \frac{1}{H_B}\right)\frac{1}{2}\right]\frac{Q_B}{P_B}$$

$$\frac{1}{E_A^{**}} = \frac{\mu_k\left(\nu_A^* \frac{Q_B}{P_B} - \nu_B^* \frac{Q_A}{P_A}\right)P_A}{\left(\mu_k \frac{Q_B}{P_B} + \frac{Q_A}{P_A}\right)Q_A}$$

$$\frac{1}{E_B^{**}} = \frac{\mu_k\left(\nu_A^* \frac{Q_B}{P_B} - \nu_B^* \frac{Q_A}{P_A}\right)P_B}{\left(\mu_k \frac{Q_B}{P_B} + \frac{Q_A}{P_A}\right)Q_B}.$$

В случае постоянной нагрузки при условии, что оба компонента следуют закону (1) оператор раскрыт в работе [10].

Для определения модуля сдвига однонаправленно армированного материала условно заменим круглые площади поперечных сечений арматуры эквивалентным квадратным. Расчетной схемой принимаем элементарный слой, который состоит из частей, неармированного подслоя и армированного подслоя. Выходя из такой расчетной схемы получаем

формулу для определения оператора модуля сдвига для различных режимов статического нагружения.

$$G^{*}_{\text{КМ}} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\right) + \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} \cdot \frac{\overline{Q}_B \cdot P_A}{P_B \cdot \overline{Q}_A}}{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} + \frac{\mu_k}{1+\mu_k}\right) + \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\right)\frac{\overline{Q}_B \cdot P_A}{P_B \cdot \overline{Q}_A}} \times$$

$$\times \frac{\overline{Q}_A}{P_A} \tag{6}$$

где в случае «типичного тела»

$$P = 1 + n\frac{d}{dt},$$

$$\overline{Q} = G^{E} + n\,G^{H}\frac{d}{dt}.$$

В случае постоянной нагрузки оператор $G^{*}_{\text{КМ}}$ раскрыт в работе [10] при условии, что оба компонента следуют закону

$$n\,G^{H}\gamma + G^{E}\gamma = \tau + n\dot{\tau}$$

Оператор коэффициента Пуассона $\nu^{*}_{\text{KKL}} = \nu^{*}_{\text{KKM}}$ определяющий поперечные деформации в оси «L» и «M» от нагрузки приложенной вдоль оси «K» на основе «метода суммирования» определяется по следующей зависимости:

$$\nu^{*}_{\text{KKL}} = \frac{1}{1+\mu_k}\nu^{*}_{A} + \frac{\mu_k}{1+\mu_k}\nu^{*}_{B} \tag{7}$$

где

$$\nu^{*}_{A} = -\frac{\varepsilon^{A}_{\text{KL}}(t)}{\varepsilon^{A}_{\text{KK}}(t)} \text{ и } \nu^{*}_{B} = -\frac{\varepsilon^{B}_{\text{KL}}(t)}{\varepsilon^{B}_{\text{KK}}(t)}.$$

Экспериментально установлено, что объем многих материалов в процессе ползучести меняется незначительно и этими изменениями, по сравнению с изменениями форм, можно пренебречь.

Тогда обобщенный закон Гука, с учетом упругого изменения объема, имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1}{9k} - \frac{P}{6Q}\right)\delta_{\text{nn}}\,\sigma_{\text{y}} + \frac{P}{2\overline{Q}}\sigma_{\text{y}} \tag{8}$$

где $\delta_{1j} = 1$ для $i = j$ и $\delta_{1j} = 0$ для $i \neq j$

K — объемный модуль упругости.

В случае одноосного растяжения из (8) получаем

$$\varepsilon_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k} + \frac{P}{\overline{Q}}\right)\sigma_k \tag{9}$$

$$\varepsilon_L = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k} - \frac{P}{2\overline{Q}}\right)\sigma_k \tag{10}$$

Для составного двухкомпонентного материала вместо уравнения (9) следует рассмотреть следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^{A}_{K} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{K_A} + \dfrac{P_A}{\overline{Q}_A}\right)\sigma^{A}_{K} \\ \varepsilon^{B}_{K} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3K_B} + \dfrac{P_B}{\overline{Q}_B}\right)\sigma^{B}_{K} \\ F_A\,\sigma^{A}_{KK} + F_B\,\sigma^{B}_{KK} = N \\ \varepsilon^{A}_{KK} = \varepsilon^{B}_{KK} = \varepsilon_{KK} \end{cases} \tag{11}$$

Начальные условия и решения этой системы при постоянной нагрузке дано в работе [10].

Для определения деформации ε_{LK} вместо уравнения (10) следует рассмотреть уравнение

$$\varepsilon^{A}_{L} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K_A} - \frac{P_A}{2\overline{Q}_A}\right)\sigma^{A}_{K}(t) \tag{12}$$

$$\varepsilon^{B}_{L} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K_B} - \frac{P_B}{2\overline{Q}_B}\right)\sigma^{B}_{K}(t) \tag{13}$$

Напряжение σ^{A}_{KK} (t) и σ^{B}_{KK} (t) получаем из решения системы (11). Решение уравнений (12) и (13) при постоянной нагрузке дано в работе [10].

Зная важнейшие технические деформативные характеристики в осях упругой симметрии для упруго вязкого материала, армированного упруго-вязкой арматурой в одном направлении можно определить важнейшие характеристики для ортогонально армированного материала.

Оператор модуля упругости E_{0K} в направлении оси «К» может быть определен по формуле аналогичной (4)

$$E^*_{0K} = \frac{1}{1+m} E^*_{KK} + \frac{m}{1+m} E^*_{LK} \qquad (14)$$

где

$$m = \frac{F_L}{F_K}$$

F_L и F_K — площади поперечного сечения армированных в направлении осей «L» и «К».

Индекс «О» в формуле (14) обозначает ортогональное армирование. E_{KK} и E_{KL} определяется по формулам типа (4) и (5).

Для определения оператора E^*_{0L} в направлении оси «L» в формуле (14) следуют индексы «К» и «L» поменять местами.

Оператор коэффициента Пуассона ν^*_{0KL} определяющий поперечные деформации оси «L» от нагрузки, проложенной вдоль оси «К», может быть определен на основе следующего равенства (15)

$$(\varepsilon_{KKL} - \varepsilon_{0KL}) E^*_{KL} F_K = (\varepsilon_{0KL} - \varepsilon_{LKL}) E^*_{LL} F \cdot F_L, \qquad (15)$$

где ε_{0KL} — поперечная деформация двухнаправленного армированного материала в направлении оси «L» при нагружении вдоль оси К,

ε_{KKL} — поперечная деформация в направлении оси «L» для слоя армированного в направлении оси «К»,

ε_{LKL} — тоже самое для слоя армированного в направлении оси «L».

После соответствующих преобразований из формулы (15) получаем следующее выражение для оператора ν^*_{0KL}:

$$\nu^*_{0KL} = \frac{E^*_{KL} \cdot \nu^*_{KKL} + m E^*_{LK} \nu^*_{LLK}}{m E^*_{LL} + E^*_{KL}} \qquad (16)$$

где

$$m = \frac{F_L}{F_K}$$

$E^*_{LK} E^*_{KL}$ определяется по формуле типа (5)

E^*_{LL} определяется по формуле типа (4)

$\nu^*_{KKL} \nu^*_{LLK}$ определяется по формуле типа (7)

Оператор сдвига G^*_{0KL} для ортогонально армированного материала можно написать в следующей форме

$$G^*_{0KL} = A_K \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\right) + \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} \cdot \frac{\bar{Q}_B P_A}{P_B \bar{Q}_A}}{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} + \frac{\mu_k}{1+\mu_k}\right) + \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\right) \frac{\bar{Q}_B P_A}{P_B Q_A}} \times$$

$$\times \frac{\bar{Q}_A}{P_A} + A_L \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\right) + \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} \cdot \frac{\bar{Q}_B P_A}{P_B \bar{Q}_A}}{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} + \frac{\mu_k}{1+\mu_k}\right) + \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{1+\mu_k}}\right) \frac{\bar{Q}_B P_A}{P_B \bar{Q}_A}} \times$$

$$\times \frac{\bar{Q}_A}{P_A} \qquad (17)$$

где

$$A_K = \frac{1}{1+m}; \quad A_L = \frac{m}{1+m}.$$

В случае постоянной нагрузки оператор раскрыт в работе [10, 11].

После того, как определены важнейшие вышерассмотренные технические характеристики, можно определить эти характеристики в произвольных осях x, y под любым углом φ к направлению ортогональной арматуры.

$$\frac{1}{E^*_x} = \frac{\cos^4 \varphi}{E^*_{0K}} + \left(\frac{1}{G^*_{0KL}} - \frac{2\nu^*_{0KL}}{E^*_{0K}}\right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E^*_{0L}}, \qquad (18)$$

$$\frac{1}{E^*_y} = \frac{\sin^4 \varphi}{E^*_{0K}} + \left(\frac{1}{G^*_{0KL}} - \frac{2\nu^*_{0KL}}{E^*_{0K}}\right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{E^*_{0L}}, \qquad (19)$$

$$\frac{1}{G^*_{xy}} = \frac{1}{G^*_{0KL}} + \left(\frac{1+\nu^*_{0KL}}{E^*_{0K}} + \frac{1+\nu^*_{0LK}}{E^*_{0L}} - \frac{1}{G^*_{0KL}}\right) \sin^2 2\varphi, \qquad (20)$$

$$\nu^*_{xy} = E^*_x \left[\frac{\nu^*_{OKL}}{E^*_{OK}} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\nu^*_{OKL}}{E^*_{OK}} + \frac{1+\nu^*_{OLK}}{E^*_{OL}} - \frac{1}{G^*_{OKL}}\right)\right]\sin^2 2\varphi, \tag{21}$$

$$\nu^*_{yx} = \nu^*_{xy} \cdot \frac{E^*_y}{E^*_x}, \tag{22}$$

$$\alpha^*_1 = \left[\frac{\sin^2\varphi}{E^*_{OL}} - \frac{\cos^2\varphi}{E^*_{OK}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G^*_{OKL}} - \frac{2\nu^*_{OKL}}{E^*_{OK}}\right)\cos^2\varphi\right]\sin 2\varphi, \tag{23}$$

$$\alpha^*_2 = \left[\frac{\cos^2\varphi}{E^*_{OL}} - \frac{\sin^2\varphi}{E^*_{OK}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G^*_{OKL}} - \frac{2\nu^*_{OKL}}{E^*_{OK}}\right)\cos^2\varphi\right]\sin^2\varphi. \tag{24}$$

где α^*_1 и α^*_2 — операторы коэффициентов влияния пропадающие в координатной системе совпадающей с осям упругой симметрии.

Выше приведенные деформативные характеристики позволяют решить плоскую задачу однонаправленно и двухнаправленно армированных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирюкович К. Л. Эффективность применения стеклянного волокна в качестве арматуры цементного камня. «Известия Киевского Политехнического Института», том XXVII, 1957.
2. Бирюкович К. Л. Прочность и деформативность стекловолокнистой арматуры. «Бетон и железобетон», № 7, 1959.
3. Булавс Ф. Я., Скудра А. М. Реология бетона напряженно армированного арматурой из стекловолокна. Исследование по бетону и железобетону. VIII. Рига 1965.
4. Ван Фо Фы Г. А. Основы теории полимерных тел с ориентированной структурой. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Инст. механики АН УССР, Киев, 1965.
5. Гвоздев А. А., Михайлов К. В., Никула И. Арматура из стеклопластиков для армирования бетонных конструкций «Бетон и железобетон», № 3, 1960.
6. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации. Прикладная математика и механика, новая серия, т. 4. В. 1, 1940.
7. Ишлинский А. Ю. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел. Доклады АН СССР, новая серия, т. 26, № 1, 1940.
8. Рабинович А. Л. Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров. Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени доктора технических наук. Физико-химический институт им. Л. Я. Карпова, Москва, 1965.
9. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем деформирующийся во времени. Москва, Ленинград, 1949.
10. Скудра А. М., Роценс К. А. Технические деформативные характеристики однонаправленно армированных упруго-вязких материалов. Ученые записки Р. П. И., строительный фак., вып. 3, 1966.
11. Скудра А. М., Роценс К. А. Технические деформативные характеристики двухнаправленно армированных упруго-вязких материалов. Ученые записки Р. П. И., строительный фак., вып. 3, 1966.
12. Хашин, Розен. Упругие модули материалов армированных волокнами. Прикладная механика (тр. амер. общ. инж. мех.), серия Е, т. 31, № 2, 1964.