ISSN 1407-8015 TRANSPORT AND ENGINEERING 2007-24
MAŠĪNZINĀTNE UN TRANSPORTS

MECHANICS
MEHĀNIKA

APPROXIMATED CALCULATION OF BASIC FREQUENCY OF TWIST OSCILLATIONS OF CYLINDRICAL SHAFTS

CILINDRISKU VĀRPSTU VĒRPES SVĀRSTĪBU PAMATFREKVENCES APTUVENA NOTEIKŠANA

Juris Cimanskis, *professor, Dr. Habil. sc. ing.*
Latvian Maritime Academy, Departament of Marine Engineering
Address: 5B Flotes Street, Riga, LV – 1016, Latvia
Phone: +371 29694017
E-mail: kmn@inbox.lv

Rihards Indriksons, *assistant professor, Dr.sc.ing.*
Latvian Maritime Academy, Department of Marine Engineering
Address: 5B Flotes Street, Riga, LV – 1016, Latvia
Phone: +371 67432091, Fax: +371 67432091
E-mail: kmn@inbox.lv

Atslēgas vārdi: vārpsta, vērpes svārstības, pašsvārstības, pamatfrekvence

Ir labi zināms, ka kuģu galvenajiem dzinējiem tiek noteiktas tā sauktās "sarkanās" apgriezienu zonas, tas ir pie kāda apgriezienu skaita minūtē nav pieļaujama ilgstoša dzinēja darbība [1]. Tas ir tāpēc, ka pie šiem apgriezieniem ievērojami palielinās spēka iekārtas vibrācijas, kas savukārt rada papildus slodzi gan dzenvārpstai, gan arī tās gultņiem. Viens no šādas parādības iemesliem ir iekšdedzes dzinēja attīstītā griezes momenta svārstību frekvences sakrišana ar kādu no dzenvārpstas vērpes pašsvārstību frekvencēm. Visizteiktākā rezonanse ir pie uzspiedējspēka frekvences sakrišanas ar zemāko pašsvārstību frekvenci jeb pamatfrekvenci. Precīzs pamatfrekvences aprēķins ir visai darbietilpīgs un daudzos gadījumos pat neizpildāms uzdevums, jo aprēķinu shēma tikai aptuveni atbilst reālai konstrukcijai. Tāpēc ir mērķtiecīgi izmantot aptuvenas aprēķina metodes, it īpaši tad, ja ar to palīdzību var noteikt intervālu, kurā atrodas meklētā pamatfrekvence.
Darbā [3] ir izvestas Releja un Donkerleja formulas aptuvenai lieces svārstību pamatfrekvences noteikšanai, pie kam Releja formula dod paaugstinātu pamatfrekvences vērtību, bet Donkerleja formula – pazeminātu.

Šajā rakstā parādīts, ka līdzīgas formulas izmantojamas arī aptuvenai vērpes svārstību pamatfrekvences aprēķinam.

Releja formula

Aplūkosim dobu vārpstu, uz kuras nostiprināti plāni diski, kuru inerces momenti pret vārpstas asi ir J_1 , J_2 , ... , J_n (1. attēls). Pieņemsim, ka vārpstas šķērsgriezuma izmēri starp diskiem katrā posmā ir nemainīgi un vārpstas kreisais gals ir iespīlēts.
Pieņemam, ka savērpes leņķis šķēlumā ar koordināti z mainās pēc harmoniska likuma:

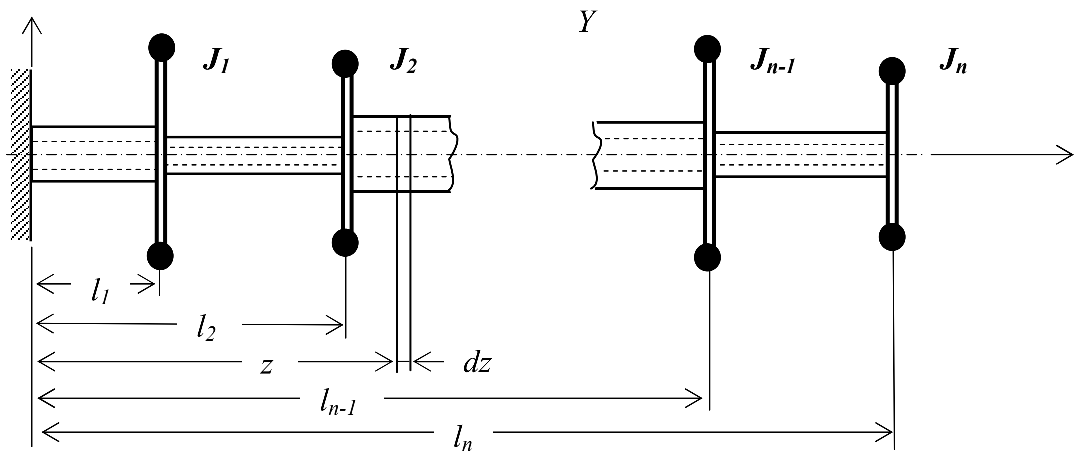
$$\varphi(z) = Z(z) \sin pt \quad ,$$

kur $Z(z)$ – argumenta z funkcija – maksimālais savērpes leņķis šķēlumā ar koordināti z .

Tādā gadījumā vārpstas elementa ar garumu dz (1.zīm.) maksimālā kinētiskā enerģija ir

$$dT_{max} = 0,5\, dJ\, p^2\, Z^2(z) \quad ,$$

kur dJ – izdalītā vārpstas elementa inerces moments pret vārpstas asi.



1. attēls. Doba vārpsta ar diskiem.

Dobām vārpstām $dJ = 0,5\, dm\, (R^2 + r^2)$ [2] ,

kur dm – izdalītā elementa masa,
R , r – vārpstas ārējais un iekšējais rādiusi šķēlumā ar koordināti z .

Apzīmējot vārpstas materiāla blīvumu ar ρ atrodam: $dm = \pi\, (R^2 - r^2)\, \rho\, dz$.

Tātad izdalītā vārpstas elementa maksimālā kinētiskā enerģija ir

$$dT_{max} = 0,25\, \pi\, \rho\, (R^4 - r^4)\, p^2\, Z^2(z)\, dz \, ,$$

bet visas vārpstas kopā ar diskiem maksimālā kinētiskā enerģija ir

$$T_{max} = 0{,}5\, p^2 \left[0{,}5\ \pi\, \rho \sum_{i=1}^{n} (R_i^4 - r_i^4) \int_{l_{i-1}}^{l_i} Z^2(z)\, dz + \sum_{i=1}^{n} J_I\, Z^2(l_i) \right]. \qquad (1)$$

Potenciālā enerģija izdalītā vārpstas elementā ir vislielākā pie maksimālā savērpes leņķa. Tā kā šķēlumā ar koordināti z maksimālais savērpes leņķis $\varphi = Z(z)$, tad viens elementa gals attiecībā pret otru pagriezīsies par leņķi

$$d\varphi = Z'(z)\, dz \quad .$$

Tā kā savērpes leņķis proporcionāls vērpes momentam M_v, tad elementā uzkrātā potenciālā enerģija ir [3]:

$$d\Pi_{max} = 0{,}5\, M_v\ d\varphi = 0{,}5\, G\, J_p\, d\varphi\, d\varphi : dz = 0{,}5\, G\, J_p\, [\, Z'(z)]^{\,2}\, dz \ ,$$

kur G – vārpstas materiāla bīdes modulis,
J_p – vārpstas šķērsgriezuma laukuma polārais inerces moments.

Gredzenveida laukumam no [3] $J_p = 0{,}5\ \pi\, (R^4 - r^4)$.

Tātad visā vārpstā maksimālā uzkrātā potenciālā enerģija ir:

$$\Pi_{max} = 0{,}25\ \pi\, G \sum_{i=1}^{n} (R_i^4 - r_i^4) \int_{l_{i-1}}^{l_I} [\, Z'(z)]^{\,2}\, dz \ . \qquad (2)$$

Pielīdzinot maksimālo potenciālo enerģiju (2) maksimālai kinētiskai enerģijai (1), pēc algebriskiem pārveidojumiem atrodam:

$$p^{\,2} = \frac{G}{\rho} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (R_i^4 - r_i^4) \int_{l_{i-1}}^{l_i} [\, Z'(z)]^{\,2}\, dz}{\sum_{i=1}^{n} (R_i^4 - r_i^4) \int_{l_{i-1}}^{l_i} Z^2(z)\, dz + \dfrac{2}{\pi\rho} \sum_{1}^{n} J_i\, Z^2(l_i)} \ . \qquad (3)$$

Donkerleja formula

Pieliekot momenta vieninieku šķēlumam, kas atrodas attālumā z no vārpstas sākuma 1. attēlā, pagrieziena leņķis ir

$$\delta_{jj} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{l_i - l_{i-1}}{J_{pi}}\ \sigma_o(\, z - l_i\,) + \frac{z - l_{i-1}}{J_{pi}}\ \sigma_o(\, z - l_{i-1}\,) \cdot \sigma_o(\, l_i - z\,) \right] .$$

Šeit $\sigma_o(\, x\,)$ – vienības funkcija ($\sigma_o(\, x\,) = 1$ pie $x \geq 0$ un $\sigma_o(\, x\,) = 0$ pie $x < 0$).

Izdalītā elementa ar garumu dz masas inerces moments $dJ_j = 0{,}5\ \pi\, (R^4 - r^4)\, \rho\, dz$.

Tātad

$$\underset{j}{\Sigma}\,\delta_{jj}\cdot dJ_j = \frac{1}{G}\left\{\frac{l_1}{J_{p1}}\,J_1 + \left[\frac{l_1}{J_{p1}} + \frac{l_2-l_1}{J_{p2}}\right]J_2 + \left[\frac{l_1}{J_{p1}} + \frac{l_2-l_1}{J_{p2}} + \frac{l_3-l_2}{J_{p3}}\right]J_3 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left[\frac{l_1}{J_{p1}} + \frac{l_2-l_1}{J_{p2}} + \ldots + \frac{l_n-l_{n-1}}{J_{pn}}\right]J_n\right\} + \frac{\pi\rho}{2G}\int_0^{l_n}(R^4-r^4)\frac{z}{J_p}\,dz\,.$$

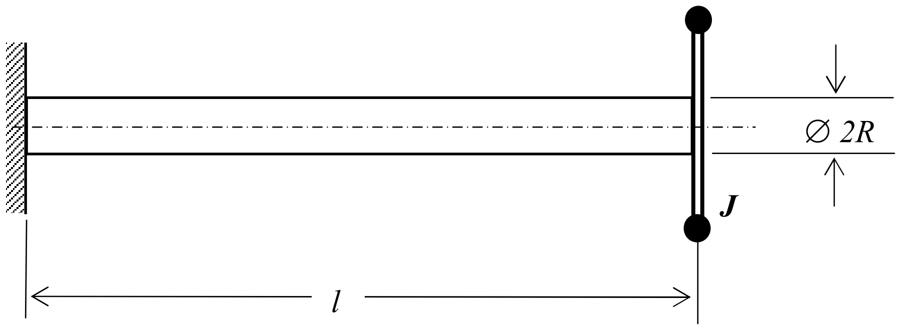
Tā kā jebkurā šķēlumā

$$\frac{R^4-r^4}{J_p} = \frac{2}{\pi}\quad ,$$

tad pēdējais integrālis kļūst vienāds ar $\frac{l_n^2}{\pi}$ un Donkerleja formulu var pierakstīt sekojoši:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2}{\pi G}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{l_i-l_{i-1}}{R_i^4-r_i^4}\sum_{j=1}^{n}J_j\right] + \frac{\rho\, l_n^2}{2\,G}\quad . \tag{4}$$

Piemēra veidā aplūkosim cilindrisku, vienlaidus šķērsgriezuma vārpstu ar galā nostiprinātu plānu disku, kura inerces moments pret vārpstas asi ir J - 2. attēlā.



2. attēls. Vienlaidus vārpsta ar disku

Šajā gadījumā formulās (3) un (4) $n=1$, $l_1=l$, $J_1=J$, $r_1=0$, $R_1=R$ un pēc algebriskiem pārveidojumiem iegūstam:

$$\frac{G}{\rho\, l^2\left[\frac{1}{2}+\frac{J}{J_v}\right]} \le p^2 \ge \frac{G}{\rho\, l^2\left[\frac{1}{3}+\frac{J}{J_v}\right]}\quad ,$$

kur

$J_v = 0{,}5\;\pi R^4\, l\,\rho$ – vārpstas inerces moments pret tās asi.

Ja vārpstas inerces moments ir daudzkārt lielāks par tās galā nostiprinātā diska inerces momentu, tad, pēdējo neievērojot, iegūstam

$$2\frac{G}{\rho\, l^2} \le p^2 \ge 3\frac{G}{\rho\, l^2}\quad .$$

Atzīmēsim, ka precīzais risinājums šādā gadījumā ir [4] :

$$p^2 = \frac{\pi^2 G}{4\rho\, l^2}\quad .$$

Savukārt, ja diska inerces moments ir daudzkārt lielāks par vārpstas inerces momentu, tad pēc algebriskiem pārveidojumiem iegūstam rezultātu, kas pilnībā sakrīt ar precīzo [4] rezultātu:

$$p^2 = \frac{\pi R^4 G}{2lJ}\quad .$$

Literatūra

1. Cimanskis J., Indriksons R., Ozoliņš J. Kuģu dzenskrūves piedziņas vārpstas griezes svārstības // RTU zinātniskie raksti. Sērija 6. Mašīnzinātne un transports. Kvalitāte un drošums. Sējums 11. - Rīga, 2003. – 10 lpp.
2. Kepe O., Vība J. Teorētiskā mehānika - Rīga, Zvaigzne, 1982. – 577 lpp.
3. Lavendelis E., Valdmanis A. Materiālu pretestība - Rīga, Zvaigzne, 1970. – 455 lpp.
4. Бабаков И. Теория колебаний - Москва, Наука, 1968 – 559 стр.

Cimanskis J., Indriksons R. Cilindrisku vārpstu vērpes svārstību pamatfrekvences aptuvena noteikšana
Izvestas formulas vārpstu vērpes pašsvārstību pamatfrekvences aptuvenai noteikšanai, no kurām viena dod paaugstinātu rezultātu, bet otra – pazeminātu, tādējādi ļaujot atrast intervālu, kurā atrodas patiesā pamatfrekvence. Aplūkota taisna vārpsta ar gredzenveida šķērsgriezumu, uz kuras nostiprināti plāni diski. Pieņemts, ka starp blakus esošiem diskiem vārpstas šķērsgriezums ir nemainīgs.

Cimanskis J., Indriksons R. Approximated calculation of basic frequency of twist oscillations of cylindrical shafts
In the article are founded formulas for approximated calculations of basic frequency of twist oscillations of shafts. One of the formulas gives elevated frequency, but the other – diminished. The straight shafts with the annular cross-section and with fixed narrow discs are seen over. It is presumed, that cross-sections between proximal discs are holds constant.

Циманскис Ю., Индриксон Р. Приближенное определение основной частоты крутильных колебаний цилиндрических валов
Выведены формулы для приближенного определения как заведомо завышенной основной частоты крутильных колебаний валов, так и заведомо заниженной. Рассматривается прямой вал с кольцеобразным поперечным сечением, на котором закреплены тонкие диски. Принято, что между смежными дисками поперечное сечение вала постоянное.