

## Исследование метода модифицированной циклической редукции для решения краевых задач теории поля

А. П. Спалвинь, Я. Я. Шланген

Аппроксимация краевой задачи теории поля методом конечных разностей (МКР) порождает систему алгебраических уравнений порядка  $N$

$$A\varphi = b. \quad (1)$$

Уравнение (1) эффективно решается вычислительной системой со специализированным сеточным процессором (СП) [1], содержащим  $m \geq N$  элементарных узловых процессоров.

Для решения уравнения (1) с точностью до 10 % при  $m \geq N$  достаточно выполнить его прямое моделирование на СП (безытерационное решение). Итерационный процесс возникает, если уравнение (1) нелинейно или его решение обладает высокой точностью. Тогда на СП организуется быстросходящийся процесс [2].

Эффективность СП значительно снижается при  $N \gg m$ . В этом случае применяются блочно-итерационные методы, где число блочных итераций определяется относительно медленно сходящимися блочно-цифровыми алгоритмами, а не эффективностью обработки отдельных блоков

на СП. В работе [3] предложено заменить метод блочных итераций методом модифицированной циклической редукции (МЦР) [6—10], использующим положительные свойства методов Федоренко [4] и циклической редукции (ЦР) [5]. Суть МЦР заключается в том, что порядок уравнения (1) снижают до  $N_i \leq m$  путем  $l$ -кратного применения алгоритма ЦР. С целью сохранения простой структуры матрицы редуцированных уравнений формулы шага ЦР модифицируют, т. е. прямой метод ЦР переводят в итерационный метод МЦР, который аналогично методу Федоренко обладает сходимостью, не зависящей от  $N$  [9], и использует многократные сетки, построенные путем редукции [10].

В настоящее время за рубежом наблюдается повышенная активность в области разработки методов многократной сетки [11—13]. В работе [14] указано на перспективность сочетания этих методов с методом ЦР.

В данной статье показаны способы существенного понижения методической погрешности МЦР, что позволяет не только уменьшить число итераций, а использовать МЦР как средство аппроксимации (в случае решения уравнения (1) с инженерной точностью), т. е. исключить итерационный процесс в СП при  $m \ll N$ . Ограничимся решением двумерной задачи, когда уравнение (1) получено с помощью пятиточечно-

го оператора МКР. Для изложения метода МЦР уравнение (1) представим в виде

$$A\varphi \equiv \begin{pmatrix} \circ \dots \circ A_{11} \dots \circ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \equiv b, \quad (2)$$

В уравнении (2) вектор  $\varphi$  разделен на векторы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  по шахматному принципу: к вектору  $\varphi_1$  отнесены белые компоненты вектора  $\varphi$ , а к вектору  $\varphi_2$  — черные. Ненулевые элементы подматриц  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  условно изображены сплошными линиями, а диагональные элементы подматриц  $A_{11}$  и  $A_{22}$  — соответственно белыми и черными кружками. С учетом возможных комбинаций исключения черных и белых подвекторов  $s$ -кратное применение алгоритма МЦР порождает  $2^s$  варианты редукции системы (2) [10]. Рассмотрим вариант, при котором постоянно исключаются только черные подвекторы. Тогда прямой ход метода МЦР имеет вид

$$\bar{A}\bar{\varphi} = \bar{b}_{(s)}, \quad (3)$$

где

$$\bar{A}_{(s)} = [A_{11} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}A_{21}]_{(s-1)}, \quad (4)$$

$$\bar{b}_{(s)} = [b_1 - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}b_2]_{(s-1)}, \quad (5)$$

$$\bar{\varphi}_{(s)} = [\varphi_1]_{(s-1)} = [\varphi_1 + \Delta_1]_{(s-1)}, \quad (6)$$

$$s = 1, 2, 3, \dots, l; \quad l = \log_2(N/m). \quad (7)$$

Выполнение обратного хода МЦР с целью получения решения в узлах исходной сетки практически не порождает дополнительной погрешности [8, 10].

Для выполнения  $s$ -го шага редукции матрицу  $[A_{22}]_{(s-1)}$  следует аппроксимировать диагональной матрицей  $[\bar{A}_{22}]_{(s-1)}$ , что согласно выражению (6) порождает погрешность МЦР  $\Delta_{(s)} = [\Delta_1]_{(s-1)}$ . Элементы матрицы  $[\bar{A}_{22}]_{(s-1)}$  необходимо определить так, чтобы погрешность  $\Delta_s$  была минимальной. Представим запись перехода  $A_{(s-1)} \rightarrow \bar{A}_{(s-1)}$  в виде

$$A_{(s-1)} = \begin{pmatrix} \circ \dots \circ A_{11} \dots \circ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \circ \dots \circ A_{11} \dots \circ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} = \bar{A}_{(s-1)},$$

при этом матрица  $[\bar{A}_{22}]_{(s-1)}$  определена следующим образом:

$$[(\bar{a}_{ij})_{22}]_{(s-1)} = 0, \quad j \neq i; \quad (8)$$

$$[(\bar{a}_{ii})_{22}]_{(s-1)} = \left[ \left( a_{ii} + \sum_{\substack{j=N_s+1 \\ j \neq i}}^{N_s-1} a_{ij} \right) \right]_{22} \Big|_{(s-1)}. \quad (9)$$

Формула (9) исключает возможность изменения диагонального преобладания в матрице  $\bar{A}_{(s-1)}$  по сравнению с матрицей  $A_{(s-1)}$ .

При использовании приведенной простейшей аппроксимации (8), (9) величины  $\bar{\varphi}_{(s)}$ ,  $\bar{\varphi}_{(s)}$  связаны зависимостью

$$|\bar{\varphi}_{(s)}| - |\varphi_{(s)}| = |\Delta_{(s)}| > 0. \quad (10)$$

Действительно,  $\|\bar{A}_{(s)}^{-1}\| > \|A_{(s)}^{-1}\|$ ,  $|\bar{b}_{(s)}| \geq |b_{(s)}|$ , поэтому  $|\bar{\varphi}_{(s)}| = |\bar{A}_{(s)}^{-1}\bar{b}_{(s)}| > |\varphi_{(s)}| = |A_{(s)}^{-1}b_{(s)}|$ . С учетом соотношения (10) погрешность  $\Delta_{(s)}$  можно уменьшать коррекцией

$$\bar{\varphi}_{(s)}^\omega = \omega_{(s)}\bar{\varphi}_{(s)}, \quad (11)$$

где  $\omega_{(s)}$  — скалярный множитель ( $0 < \omega_{(s)} \leq 1$ ), который подбирается так, чтобы  $|\bar{\varphi}_{(s)}^\omega| - |\varphi_{(s)}| = |\Delta_{(s)}^\omega| < |\Delta_{(s)}|$ . Обычно  $|\Delta_{(s)}| = (3 \div 10)|\Delta_{(s)}^\omega|$ . Коррекцию (11) условно назовем  $\omega$ -коррекцией.

При выводе формулы для ориентировочного расчета величин  $\omega_{(s)}$  следует учесть, что между диагональными элементами матриц  $A_{(s-1)}$ ,  $\bar{A}_{(s-1)}$  имеется формальное соответствие:

$$\left. \begin{aligned} [(a_{ii})_{11}]_{(s-1)} &= [\bar{\omega}_i^{-1}(\bar{a}_{ii})_{11}]_{(s-1)}, \quad i \in \overline{(1, N_s)}; \\ [(a_{jj})_{22}]_{(s-1)} &= [\bar{\omega}_j^{-1}(\bar{a}_{jj})_{22}]_{(s-1)}, \quad j \in \overline{(N_s+1, N_{s-1})}; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{\omega}_i^{-1}]_{(s-1)} &= 1, \quad i \in \overline{(1, N_s)}; \\ [\bar{\omega}_j^{-1}]_{(s-1)} &= [(a_{jj})_{22}]_{(s-1)} / [(\bar{a}_{jj})_{22}]_{(s-1)}, \quad j \in \overline{(N_s+1, N_{s-1})}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $[\bar{\omega}_i^{-1}]_{(s-1)}$ ,  $[\bar{\omega}_j^{-1}]_{(s-1)}$  — вспомогательные множители, обеспечивающие выполнение равенств (12).

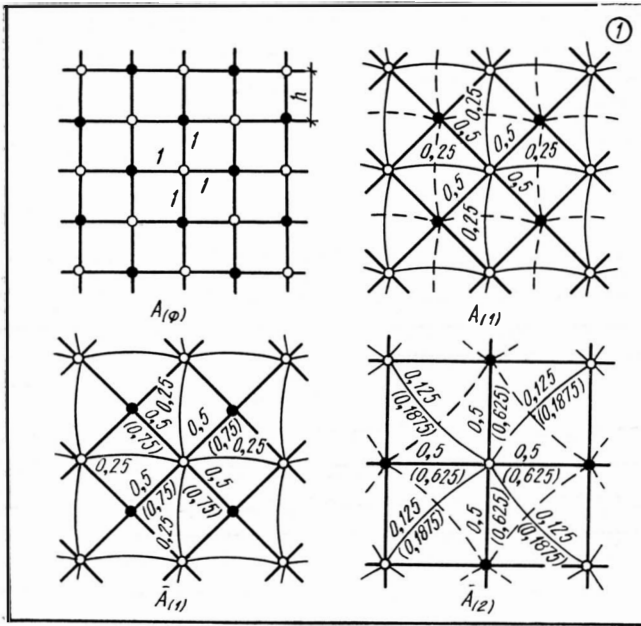
Если для расчета множителя  $\omega_{(s)}$  использовать формулы (13), то  $\omega_{(s)}$  будет диагональной матрицей, а не скалярной. Это усложняет  $\omega$ -коррекцию, но по-прежнему не обеспечивает условие  $\Delta_{(s)} = 0$ , так как соотношения (12) учитывают только локальные свойства матриц  $A_{(s-1)}$ ,  $\bar{A}_{(s-1)}$ . Кроме того, уже было выполнено  $(s-2)$  циклов редукции. Поэтому введем следующее усреднение:

$$\bar{\omega}_{(s-1)} = \left( \frac{N_s + \sum_{j=N_s+1}^{N_s-1} [\bar{\omega}_j^{-1}]_{(s-1)}}{N_{s-1}} \right)^{-1} \approx \left( 0,5 + \frac{1}{N_{s-1}} \sum_{j=N_s+1}^{N_s-1} [\bar{\omega}_j^{-1}]_{(s-1)} \right)^{-1}. \quad (14)$$

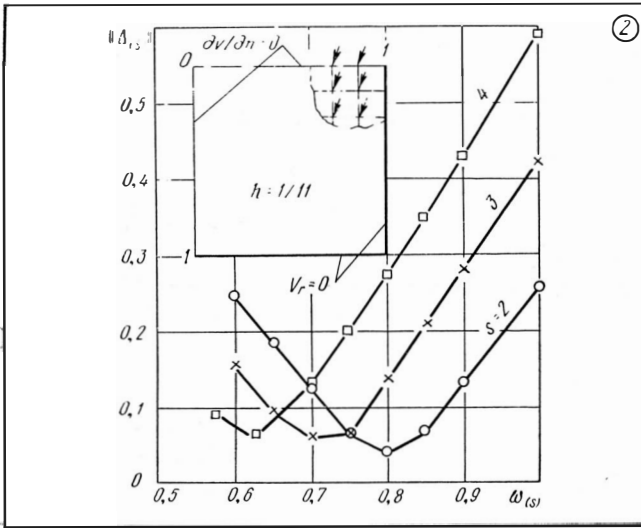
С учетом формулы (14) и предыдущих редукций окончательно имеем

$$\omega_{(s)} = \omega_{(s-1)}\bar{\omega}_{(s-1)}; \quad \omega_{(1)} = 1; \quad s = 2, 3, \dots, l. \quad (15)$$

Нами установлено, что в целях минимизации  $\Delta_{(s)}$  по формуле (15) можно получить значения  $\omega_{(s)}$ , близкие к оптимальным. Если  $\omega$ -коррекция используется для МЦР в режиме итераций [6—8], то результат (15) следует увеличить на



Пример двухкратной МЦР фрагмента графа матрицы задачи 1.



Погрешность решения задачи 1 с применением  $\omega$ -коррекции.

5—10 % для получения максимальной скорости сходимости. Однако  $\omega$ -коррекция имеет недостаток, заключающийся в том, что при переходе  $A_{(s-1)} \rightarrow \bar{A}_{(s-1)}$  ненулевые элементы  $[(a_{ij})_{22}]_{(s-1)}$ ,  $j \neq i$ , отбрасываются (формула (8)) и не влияют на результат перехода. Этот недостаток частично устранен в изложенной ниже  $\alpha$ -коррекции, которая «распределяет» диагональные соединения типа  $[(a_{ij} = a_{ji})_{22}]_{(s-1)}$  по смежным «главным» соединениям согласно формулам

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{ei}^i &= \bar{a}_{ei}^i = a_{ie} + k^{ij}; & \bar{a}_{ej}^j &= \bar{a}_{ej}^j = a_{je} + k^{ji}; \\ \bar{a}_{di}^i &= \bar{a}_{di}^i = a_{id} + k^{ij}; & \bar{a}_{dj}^j &= \bar{a}_{dj}^j = a_{jd} + k^{ji}; \\ k_{ij}^{ij} &= k_{ji}^{ji} = \alpha a_{ij}; & a_{de} &= a_{ed} = \bar{a}_{de} = \bar{a}_{ed}, \end{aligned} \right\} (16)$$

где  $\alpha$  — скалярный множитель. Верхние индексы  $ij$ ;  $ji$  в формулах (16) означают учет только локального влияния  $k^{ij} = k^{ji}$  элемента  $a_{ij} = a_{ji}$ . Во внутренних узловых точках (УТ) каждый главный элемент имеет два компонента коррекции, например  $\bar{a}_{ie} = \bar{a}_{ei} = a_{ie} + k^{ij} + k^{ji}$ ;  $\bar{a}_{je} = \bar{a}_{ej} = a_{je} + k^{ji} + k^{ij}$ . При  $\alpha$ -коррекции переход  $A_{(s-1)} \rightarrow \bar{A}_{(s-1)}$  записывается в виде

$$\bar{A}_{(s-1)} \approx A_{(s-1)} + \begin{array}{c|c} N_s & N_s \\ \hline 0 & K_{12} \\ \hline 0 & K_{21} \\ \hline & K_{22} \end{array} \quad (s-1) \quad (17)$$

где элементы матриц  $[K_{11}, K_{21} = K_{12}^T, K_{22}]_{(s-1)}$  вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} (k_{ij})_{11} &= 0; & i \neq j; & i, j \in \overline{(1, N_s)}; \\ (k_{ii})_{11} &= - \sum_{j=N_s+1}^{N_s-1} (k_{ij})_{12}; & i \in \overline{(1, N_s)}; \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} (k_{ji})_{12} &= (k_{ij})_{21} = (k^{ie} + k^{if})_{21}; \\ i \neq e \neq f; & i, e, f \in \overline{(N_s + 1, N_{s-1})}; & j \in \overline{(1, N_s)}; \\ k^{ie} &= \alpha (a_{ie})_{22}; & k^{if} &= \alpha (a_{if})_{22}; \\ (k_{ij})_{21} &= 0, & \text{если } (a_{ij})_{21} &= 0; \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{aligned} (k_{ii})_{22} &= - \sum_{j=1}^{N_s} (k_{ij})_{21} + \sum_{\substack{j=N_s+1 \\ j \neq i}}^{N_s-1} (a_{ij})_{22}; \\ & i \in \overline{(N_s + 1, N_{s-1})}; \\ (k_{ij})_{22} &= - (a_{ij})_{22}; & j \neq i; \\ & i, j \in \overline{(N_s + 1, N_{s-1})}. \end{aligned} \right\} (20)$$

Для значений  $i \in \overline{(N_s + 1, N_{s-1})}$ , которым соответствуют внутренние черные УТ, первая формула (20) с учетом (19) принимает вид

$$\begin{aligned} (k_{ii})_{22} &= -2\alpha \sum_{\substack{j=N_s+1 \\ j \neq i}}^{N_s-1} (a_{ij})_{22} + \sum_{\substack{j=N_s+1 \\ j \neq i}}^{N_s-1} (a_{ij})_{22} = \\ &= (1 - 2\alpha) \sum_{\substack{j=N_s+1 \\ j \neq i}}^{N_s-1} (a_{ij})_{22}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формул (17)–(21) следует, что  $\alpha$ -коррекция распространяется на все четыре блока матрицы  $A_{(s-1)}$ , поэтому выражения (4), (5) следует за-

менить выражениями

$$\begin{aligned} \bar{A}_{(s)} &= [\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21}]_{(s-1)}; \\ \bar{b}_{(s)} &= [b_1 - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} b_2]_{(s-1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Установлено, что для  $\alpha$ -коррекции при  $0,25 \leq \alpha \leq 0,5$  погрешность МЦР  $\Delta_{(s)}^\alpha$  меньше  $\Delta_{(s)}^\omega$  в 3—5 раз. Если множитель  $\alpha$  находится в указанном интервале, то погрешность  $\Delta_{(s)}^\alpha = \Delta(\alpha)$  меняется незначительно и практически не зависит от  $s$ . Следовательно, нет острой необходимости в расчете точного значения оптимума множителя  $\alpha$ . Такое поведение  $\alpha$ -коррекции можно объяснить следующим образом. Согласно формуле (21) для минимизации ошибки определения вектора  $[\varphi_2]_{(s-1)}$  наилучшим является  $\alpha_2 = 0,5$ , в результате чего  $(k_{ii})_{22} = 0$ . Для вектора  $[\varphi_1]_{(s-1)}$  подобное условие  $(k_{ii})_{11} = 0$  выполняется при  $\alpha_1 = 0$ . Однако при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  матрица  $\bar{A}_{(s-1)}$  несимметрична, что недопустимо, если в качестве СП используется  $R$ -сетка. Поэтому необходимо обеспечить условие  $\alpha_{\text{опт}} = \alpha_1 = \alpha_2$ . При выборе усредненного значения  $\alpha_{\text{опт}} = 0,5$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 0,25$ ) получим лишь нижнюю грань рекомендуемого диапазона изменения множителя  $\alpha$ . Верхнюю грань (0,5) можно получить с учетом того, что ошибка  $\Delta_{(s)}^\alpha$  незначительно увеличивается при возрастании  $\alpha_1$  вплоть до величины 0,5, а значение  $\alpha_2$  допустимо брать несколько больше этого значения.

Дальнейшее рассмотрение  $\omega$ - и  $\alpha$ -коррекции выполним путем анализа результатов численного эксперимента.

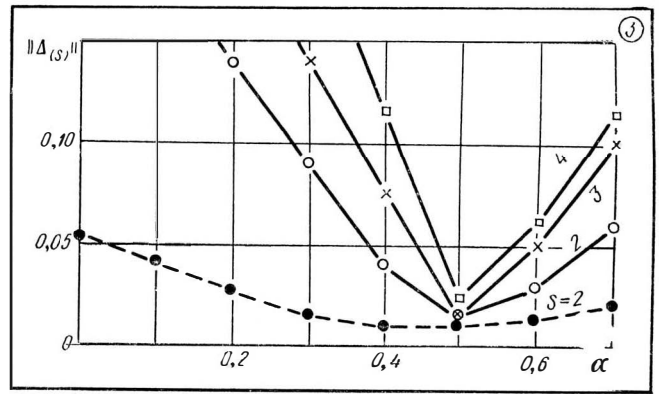
В качестве контрольной задачи 1 определим уравнение Пуассона  $\Delta v = -4 + 2x^2 + 2y^2$  в квадрате  $11 \times 11$ ;  $h = 1/11$  с граничными условиями  $v_r = 0$  при  $x = y = 1$ ;  $\partial v / \partial n = 0$  при  $x = y = 0$ . Аналитическое решение  $v = (1 - x^2)(1 - y^2)$  имеет нулевые частные производные, начиная с третьей, поэтому погрешность МКР  $\tilde{\Delta}_{(s)} = 0$  и ошибку МЦР  $\Delta_{(s)}$  можно вычислить сравнением аналитического решения и вектора  $\bar{\varphi}_{(s)}$ .

На рис. 1 показан пример двухкратной МЦР на фрагменте графа матрицы задачи 1. Вес соответствующих недиагональных элементов матриц приведен для случая, когда аппроксимация  $A_{(1)}$  матрицей  $\bar{A}_{(1)}$  выполнена по формулам (8), (9). В скобках дан вес этих элементов, рассчитанный по формулам (17)—(22) при  $\alpha = 0,5$ .

Об эффективности  $\omega$ -коррекции и пригодности выражения (15) позволяют судить зависимости  $\|\Delta_{(s)}\| = \Delta(\omega_{(s)})$ ,  $s = 2, 3, 4$ , изображенные на рис. 2. Величина  $\|\Delta_{(s)}\|$  определяется по формуле

$$\|\Delta_{(s)}\| = \max_i \left| \frac{\bar{\varphi}_{(s)} - \varphi}{\|\varphi\|} \right|.$$

Расположение минимумов кривых погрешностей хорошо совпадает со значениями  $\omega_{(2)} = 0,8$ ;  $\omega_{(3)} = 0,7$ ;  $\omega_{(4)} = 0,61$ , прогнозируемыми формулой (15). Из рис. 2 следует, что простейшая аппрок-



Погрешность решения задачи 1 с применением  $\alpha$ -коррекции.

симация (8), (9) ( $\omega = 1$ ) дает существенную погрешность решения  $\varphi_{(s)}$ , которая уменьшается в 6—10 раз при использовании  $\omega$ -коррекции, причем  $\Delta_{(s)}^\omega$  несущественно зависит от  $s$ .

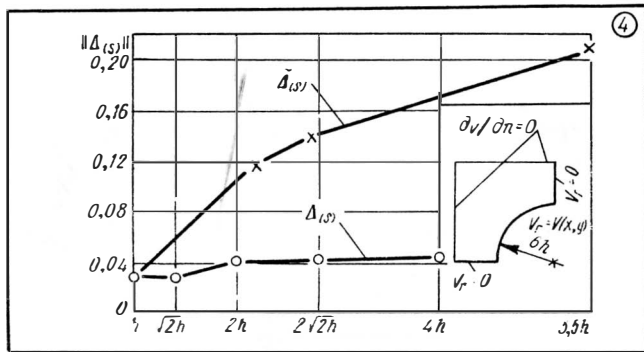
Зависимости  $\|\Delta_{(s)}\| = f(\alpha)$  для задачи 1 при использовании  $\alpha$ -коррекции приведены на рис. 3, из которого видно, что кривые имеют минимум при  $\alpha = 0,5$  для всех значений  $s$ . Величина  $\Delta_{(s)}^\alpha$  несущественно зависит от значения  $s$  и степени обусловленности матрицы исходной задачи. Об этом свидетельствует штриховая кривая, изображенная на рис. 3, которая получена резким уменьшением обусловленности этой матрицы путем замены граничных условий второго рода на двух сторонах квадрата соответствующими граничными условиями первого рода. При этом погрешность  $\|\Delta_{(s)}\|$  невелика даже без применения коррекции ( $\alpha = 0$ ;  $\omega = 1,0$ ). Из сравнения рис. 2 и 3 следует, что погрешность  $\alpha$ -коррекции для задачи 1 примерно в три раза меньше погрешности  $\omega$ -коррекции.

Определялась зависимость  $\|\Delta_{(s)}\| = f(\alpha)$  при  $s = 2$  контрольной задаче 2, для моделирования которой необходима моделирующая неоднородная среда с законом изменения  $\sigma = (xy)^{-1}$  для уравнения  $\nabla(\sigma \nabla v) = 0$  в квадрате  $11 \times 11$ ,  $h = 1/12$ . Задача имеет аналитическое решение  $v = (xy)^2$ , заданы граничные условия первого рода, ошибка МКР  $\tilde{\Delta}_{(s)} = 0$ . Зависимость  $\|\Delta_{(s)}\|$  близка к штриховой кривой на рис. 3. Из результатов решения задачи 1 следует, что  $\omega$ -коррекция в 5—8 раз чувствительнее к отклонению множителя  $\omega$  от оптимального значения, чем  $\alpha$ -коррекция к вариациям величины  $\alpha$ .

Следует отметить результаты, полученные сопоставлением поведения погрешностей МЦР  $\Delta_{(s)}$  и МКР  $\tilde{\Delta}_{(s)}$ . Погрешность  $\tilde{\Delta}_{(s)}$  определялась по формуле  $\tilde{\Delta}_{(s)} = (\varphi - \bar{\varphi})_{(s)}$ , где  $\varphi_{(s)}$  — точное решение ( $\Delta_{(s)} = 0$ ) уравнения (2);  $\bar{\varphi}_{(s)}$  — решение алгебраического уравнения

$$[\tilde{A} \tilde{\varphi} = \tilde{b}]_{(s)}, \quad (23)$$

полученного посредством МКР при шаге  $\tilde{h} \approx$



Сопоставление погрешностей МЦР ( $\|\Delta_{(s)}\| = \Delta(h_{(s)})$ ) и МКР ( $\|\tilde{\Delta}_{(s)}\| = \Delta(\tilde{h})$ ) при решении задачи 1 с криволинейной границей.

$\approx h_{(s)} = 2^{0,5s}h$ . Следовательно, при  $s=0$  уравнения (2) и (23) совпадают. С возрастанием  $s$  погрешность решения системы (3) оценивается величиной  $\|\Delta_{(s)}\|$ , а системы (23) — величиной  $\|\tilde{\Delta}_{(s)}\|$ .

В качестве контрольной задачи была использована модификация задачи 1 (рис. 4), где введен участок криволинейной границы, поэтому  $\tilde{\Delta}_{(s)} \neq 0$ . Метод конечных разностей применялся согласно работе [15]. Для МЦР была использована  $\alpha$ -коррекция при  $\alpha=0,5$ . Из рис. 4 следует, что  $\tilde{\Delta}_{(s)} \gg \Delta_{(s)}$ . Это позволяет рекомендовать МЦР как мощный метод аппроксимации краевых задач. Преимущество МЦР перед МКР можно объяснить следующими факторами:

1) прямой ход МЦР (3)–(7) следует рассматривать как весьма совершенный алгоритм интерполяции решения с УТ мелкой сетки на УТ грубой сетки, неявно использующий схему более совершенного девятиточечного оператора с диагональными связями;

2) в МЦР (в отличие от МКР) выполняется сложное перераспределение диагонального преобладания и компонентов вектора правых частей;

3) в МЦР выполняется эффективное «сглаживание» решения  $\bar{\varphi}_{(s)}$ , что уменьшает погрешность.

Таким образом, рассмотренные  $\omega$ - и  $\alpha$ -коррекции существенно минимизируют погрешность МЦР. Это позволяет использовать метод МЦР для прямого моделирования при достаточной точности решения. Рассмотренные коррекции также заметно ускоряют сходимость итерационного алгоритма МЦР.

1. Параллельные вычислительные методы и средства для решения краевых задач теории поля / Я. Ф. Блейер, М. Ф. Гринхоф, Э. Э. Родэ, А. П. Спальвинь, Р. А. Янбицкий.— Изв. АН Латв. ССР, 1980, № 6, с. 105–117.
2. Spalvinš A., Rohde E. The Hybrid Computer Systems of the type «DC—Network» and the Problem of Simplifying the Network.— In: Proc. of the 8th AICA Congress «Simulation of Systems», North—Holland Publ. Company, 1976, p. 381–389.
3. Спальвинь А. П. Применение диагональных сеток в гибридных вычислительных системах.— В кн.: Вопросы проектирования и математического обеспечения информационно-вычислительных систем: Тез. докл. обл. науч.-техн. конф., Пенза, февр. 1974 г. Пенза: Пензенская правда, 1973, с. 14.
4. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, т. 1, № 5, с. 922–927.
5. Heller D. Some aspects of the cyclic reduction algorithm for block tridiagonal linear systems.— SIAM J. Numer. Anal., 1976, 13, № 4, p. 484–496.
6. Спальвинь А. П., Шланген Я. Я. Некоторые эксперименты по использованию диагональных сеток.— Электроника и моделирование, 1975, вып. 11, с. 57–60.
7. Спальвинь А. П., Шланген Я. Я. Рекуррентное применение простых алгебраических преобразований для минимизации аналоговой части гибридной вычислительной системы (ГВС) типа «сетка-ЦВМ».— В кн.: Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. Ilmenau, 1976, heft 4, s. 125–128.
8. Спальвинь А. П., Шланген Я. Я. Модификация метода циклической редукции для решения больших алгебраических систем на однородной вычислительной среде.— В кн.: Вычислительная техника и краевые задачи. Рига: Рижск. политехн. ин-т, 1979, с. 141–150.
9. Шланген Я. Я. Последовательно-параллельный метод для решения больших систем разностных уравнений на однородной вычислительной среде.— In: Systems Analysis and Simulation. Proc. of the International Symposium. Berlin. Akademic-Verlag, 1980, s. 237–241.
10. Кривевиць Г. Т., Шланген Я. Я. Топология сеточного процессора для решения систем разностных уравнений высокого порядка.— В кн.: Вычислительная техника и краевые задачи. Методы и специализированные вычислительные средства. Рига: Рижск. политехн. ин-т, 1981, с. 21–29.
11. Erste grosse «Mehrgitter»-tagung in Europa.— Der GMD—Spiegel, 1981, N 4/81, s. 78–79.
12. Foerster H. Eine Vortragsreise über Mehrgittermethoden.— Der GMD—Spiegel, 1981, N 4/81, s. 95–99.
13. Foerster H., Witsch K. On Efficient Multigrid Software for Elliptic Problems on Rectangular Domains.— Mathematics and Computers in Simulation, 1981, N 23, s. 293–298.
14. Trottenberg U. Schnelle Lösung partieller Differentialgleichungen— Idee und Bedeutung des Mehrgitterprinzips.— In: GMD Jahresbericht 1980/81. Bonn: Selbstverlag GMD, 1982, s. 65–95.
15. Иосель Ю. Я., Кленов Г. Э., Павловский Р. А. Расчет и моделирование контактной коррозии судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1979.— 261 с.

Поступила 22.09.82