МЕХАНИКА ПОЛИМЕРОВ, 1970, 2, 345—351

УДК 678:624.074.5.001

И. В. Кнетс, В. А. Касьянов

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ НА РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Исследуется влияние начальных несовершенств, кривизны панелей и уровня развития пластических деформаций на равновесные состояния продольно сжатых цилиндрических панелей. Физические соотношения установлены на основе теории локальности деформаций. Найдено, что начальные несовершенства существенно понижают верхнее критическое напряжение в зоне упругих и слаборазвитых пластических деформаций в зависимости от параметра кривизны $\frac{a}{R}$. В зоне развитых пластических деформаций решение по нелинейной теории оболочек приближается к решению по линейной теории оболочек и изменение кривизны панелей не вызывает резкого увеличения верхнего критического напряжения, как это имеет место в зоне упругих деформаций. Илл. 5, библ. 15.

Широкое применение в современных конструкциях нашли панели разных конфигураций и кривизны. Одна из наиболее часто применяемых форм для создания обшивки корпусов кораблей и летательных аппаратов — цилиндрические панели, которые иногда называют также пологими цилиндрическими оболочками. Изучению устойчивости и закритических равновесных состояний панелей в упругой области работы материала посвящен ряд исследований[1—5 и др.]. Подробный анализ влияния начальных несовершенств на равновесные состояния панелей приведен в работе[2]. Однако оценке влияния пластических деформаций на закритическое поведение панелей не уделялось достаточного внимания, — этому вопросу посвящено только несколько работ, из которых следует отметить решение[6], полученное на основе теории деформаций для несжимаемого материала ($\mu=0{,}5$), и решение[7], полученное на основе теории локальности деформаций для материала с коэффициентом Пуассона, равным нулю.

Применение новых конструкционных материалов, изготовленных на основе полимеров, разных сплавов и композитных материалов, имеющих нелинейную связь между напряжениями и деформациями с самого начала нагружения, требует более детального анализа равновесных состояний начально несовершенных панелей. В данной работе на основе теории локальности деформаций предложен анализ равновесных состояний одноосно сжатых, физически нелинейных цилиндрических панелей, имеющих начальные геометрические несовершенства формы. Исследовано также влияние кривизны панели на критическое напряженное состояние при разных уровнях развития пластических деформаций.

Физические соотношения. На основе теории локальности деформаций[8—11] соотношения между приращениями деформаций и напряжений и основным напряженным состоянием принимают вид:

$$de_{ij}^{p}=\frac{1}{S}\int_{S(*)} Q(\sigma_{xz})\frac{\partial\widetilde{\sigma}_{xz}}{\partial\sigma_{ij}}\frac{d\sigma_{xz}}{d\sigma_{kl}}d\sigma_{kl}ds,$$

$$\text{если}\quad \sigma_{xz}=\sigma_{xz*}\quad\text{и}\quad \frac{d\sigma_{xz}}{d\sigma_{kl}}d\sigma_{kl}>0; \tag{1}$$

$$de_{ij}^{p}=0,\quad \text{если}\quad \sigma_{xz}<\sigma_{xz*}\quad\text{или}\quad \sigma_{xz}=\sigma_{xz*}\quad\text{и}\quad \frac{d\sigma_{xz}}{d\sigma_{kl}}d\sigma_{kl}\leqslant 0,$$

где $\sigma_{xz}=\sigma_{kl}l_{kx}l_{lz}$ — касательное напряжение на локальной площадке, зависящее от напряженного состояния в основной системе координат; σ_{xz*} — наибольшее значение касательного напряжения на соответствующей локальной площадке в предыстории нагружения; $Q(\sigma_{xz})=a_{xzxz\ldots xz}^{(2n+2)}\,n\sigma_{xz}^{n-1}$ — функция, зависящая от напряженного состояния и физических характеристик материала; $\tilde{\sigma}_{xz}=\sigma_{mn}l_{mx}l_{nz}$; $i, j, k, l, m, n=1, 2, 3$.

На основе этих соотношений определяются компоненты тензора податливостей в момент потери устойчивости[12]. В случае одноосного напряженного состояния эти зависимости принимают вид[13]:

$$\begin{aligned}
a_{1111}&=\frac{1}{E}+na_{xzxz\ldots xz}^{(2n+2)}c_n\sigma_{11}^{n-1};\\
a_{2222}&=\frac{1}{E}+\frac{3n^2+2n+3}{8n}a_{xzxz\ldots xz}^{(2n+2)}c_n\sigma_{11}^{n-1};\\
a_{1122}&=-\frac{\mu}{E}-\frac{1}{2}na_{xzxz\ldots xz}^{(2n+2)}c_n\sigma_{11}^{n-1};\\
a_{1212}&=\frac{1+\mu}{E}+\frac{3}{2}a_{xzxz\ldots xz}^{(2n+2)}c_n\sigma_{11}^{n-1},
\end{aligned} \tag{2}$$

где E — начальный модуль упругости; n — степень нелинейности материала[14]; $a_{xzxz\ldots xz}^{(2n+2)}$ — компонента тензора податливости $(2n+2)$-го ранга, характеризующая свойства материала;

$$c_n=\frac{1}{S}\int\limits_{S(+)} l_{iz}^{n+1}(1-l_{iz}^2)^{\frac{n+1}{2}}ds.$$

Основные уравнения изогнутой поверхности панели. Полные вариации деформаций δe_{ij} состоят из вариаций деформаций в срединной поверхности $\delta e_{ij\,\text{ср}}$ и вариаций деформаций изгиба $\delta e_{ij\,\text{и}}$. Вариации деформаций в срединной поверхности определяются с учетом начальных геометрических несовершенств:

$$\begin{aligned}
\delta e_{11\,\text{ср}}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x};\\
\delta e_{22\,\text{ср}}&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{w}{R};\\
2\delta e_{12\,\text{ср}}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y},
\end{aligned} \tag{3}$$

где w — приращение радиального перемещения; w_0 — начальное отклонение радиального перемещения от идеальной формы.

С учетом гипотезы прямых нормалей вариации деформаций изгиба определяются согласно зависимостям

$$\delta e_{11\,\text{и}}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \delta e_{22\,\text{и}}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\quad \delta e_{12\,\text{и}}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{4}$$

На основе уравнений равновесия устанавливаем, что существует функция напряжений, через которую можно выразить вариации напряжений $\delta\sigma_{kl}$:

$$\delta\sigma_{11}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2};\quad \delta\sigma_{22}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2};\quad \delta\sigma_{12}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{5}$$

Так как вариации деформаций выражаются через вариации напряжений в виде:

$$\delta e_{ij}=a_{ijkl}\delta\sigma_{kl}, \tag{6}$$

где тензор податливостей определяется согласно (2), то уравнение совместности деформаций на основе зависимостей (3), (5) и (6) принимает вид:

$$a_{1111}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+a_{2222}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2(a_{1122}+2a_{1212})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}-$$

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Сделаем следующие предположения: 1) принимаем, что при развитых пластических деформациях влияние зон разгрузки несущественно и им можно пренебречь; 2) согласно концепции Ли и Эйдса[15] компоненты тензоров податливости a_{ijkl} и жесткости A_{klij} определяются только как функции от напряжений в срединной поверхности и не зависят от амплитуды деформированной поверхности.

На основе этих предположений уравнение равновесия изогнутой поверхности после интегрирования по толщине панели может быть представлено в виде:

$$\frac{h^2}{12}\left[A_{1111}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+A_{2222}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2(A_{1122}+2A_{1212})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2}-$$

$$-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x\partial y}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \tag{8}$$

где A_{klij} — компоненты тензора жесткости[13].

Равновесные состояния панели. Проведем анализ равновесных состояний шарнирно закрепленной продольно сжатой цилиндрической панели (рис. 1). Граничные условия панели: $w=0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ при $x=0$, a и $w=0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ при $y=0$, b, где a и b — длина и ширина панели соответственно.

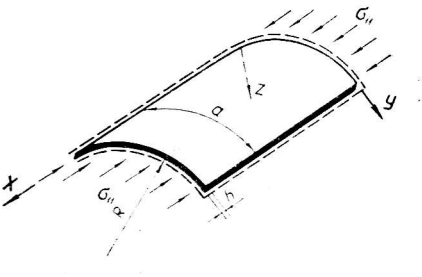


Рис. 1.

Этим граничным условиям удовлетворяет выражение для радиального прогиба в виде бесконечного ряда:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{9}$$

где m и n — количество полуволн вдоль осей x и y соответственно.

В качестве первого приближения ограничимся учетом только первого члена этого ряда. Начальные геометрические несовершенства принимаем в форме, соответствующей дополнительному радиальному прогибу:

$$w_0=f_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{10}$$

Определяя функцию напряжений из уравнения совместности деформаций[7] и в последующем решая дифференциальное уравнение равновесия изогнутой поверхности (8) методом Бубнова—Галеркина, получаем уравнение, которое определяет равновесные состояния начально несовершенных цилиндрических панелей. В частном случае квадратной панели ($a=b$) это определяющее уравнение принимает вид:

$$\frac{\pi^4K_3}{16}\psi^3-\left[\frac{4\xi}{3}\left(\frac{8}{K_2}+\frac{1}{2a_{2222}}\right)-\frac{3\pi^4}{16}\psi_0\right]\psi^2+$$

$$+\left[2\psi_0\left(\frac{\pi^4K_3}{16}\psi_0-\frac{16\xi}{3K_2}-\frac{2\xi}{3a_{2222}}\right)+\frac{\pi^4K_1}{12}+\frac{\xi^2}{K_2}-\right.$$

$$\left.-k\left(\frac{\pi^4K_{1*}}{12}+\frac{\xi^2}{K_{2*}}\right)\right]\psi-k\left(\frac{\pi^4K_{1*}}{12}+\frac{\xi^2}{K_{2*}}\right)\psi_0=0, \tag{11}$$

где $\psi=\frac{f}{h}$; $\psi_0=\frac{f_0}{h}$; $\xi=\frac{a\,a}{hR}$; h — толщина панели; R — радиус кривизны; f — амплитуда дополнительных прогибов; f_0 — амплитуда начальных несовершенств от идеальной формы; $k=\frac{\sigma_{11\text{ср}}}{\sigma_{11\text{кр}}}$ — параметр нагружения, показывающий, какая часть от критического напряженного состояния идеальной панели достигнута в данный момент нагружения;

$$K_1=A_{1111}+A_{2222}+2(A_{1122}+2A_{1212});$$

$$K_2=a_{1111}+a_{2222}+2(a_{1122}+2a_{1212});\qquad K_3=\frac{1}{a_{1111}}+\frac{1}{a_{2222}};$$

$$K_{1*}=A_{1111*}+A_{2222*}+2(A_{1122*}+2A_{1212*});$$

$$K_{2*}=a_{1111*}+a_{2222*}+2(a_{1122*}+2a_{1212*});$$

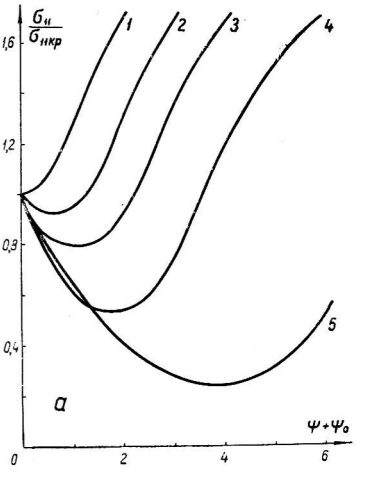
$$A_{klij}=f(\sigma_{kl\,\text{ср}});\qquad A_{klij*}=f(\sigma_{kl\,\text{кр}}).$$

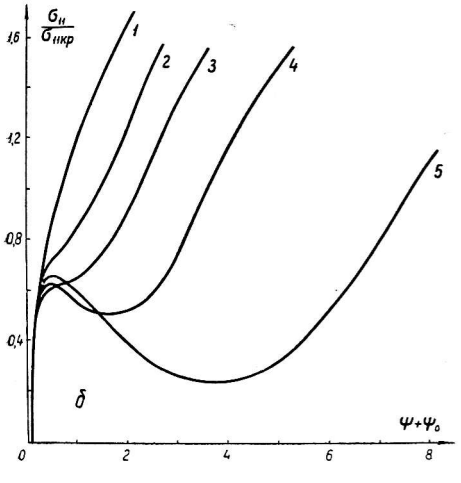
Критическое отношение $\frac{a}{h}$ идеальной пластинки при заданном напряженном состоянии определяется согласно зависимости (11), если $\psi_0=0$ и $\psi\to 0$:

$$\left(\frac{a}{h}\right)_{\text{кр}}=\sqrt{\frac{1}{12\left(\sigma_{11\,\text{кр}}-\frac{a^2}{R^2}\frac{1}{\pi^2 K_{2*}}\right)}}. \qquad (12)$$

Численный анализ проведен на БЭСМ-2 для панелей, изготовленных из физически нелинейного материала (сплав Д-16-Т[4]).

Результаты исследований показывают, что для упругих, начально совершенных квадратных цилиндрических панелей нижнее критическое напряжение понижается с возрастанием параметра кривизны $\frac{a}{R}$ (рис. 2 — *а*). С увеличением параметра начальных несовершенств ψ_0 разница между верхним и нижним критическими напряжениями уменьшается, причем верхнее критическое напряжение приближается к нижнему (рисунки 2 — *б*, *в* и 3 — *а*). При малых величинах параметра кривизны $\frac{a}{R}$ и больших начальных несовершенствах не имеет места хлопок, т. е. отсутствует уровень нижнего критического напряжения. С развитием пластических деформаций для начально совершенных панелей разница между верхним и нижним критическими напряжениями уменьшается, причем решение по нелинейной теории (нижнее критическое напряжение) приближается к решению по линейной теории (верхнее критическое





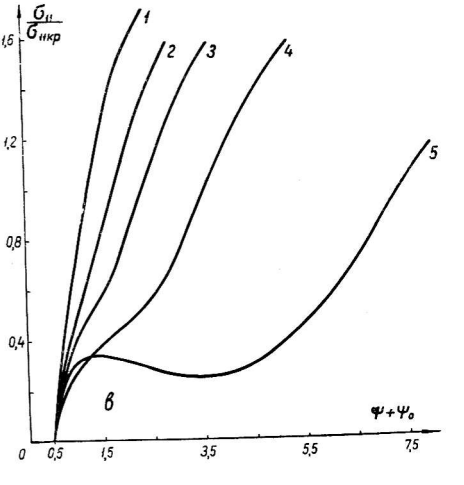


Рис. 2. $\frac{a}{R}=0$ (*1*); 0,1 (*2*); 0,15 (*3*); 0,2 (*4*); 0,25 (*5*). $\sigma_{11\text{кр}}=1400$ *кгс/см*^{2}. $\psi_0=0$ (*а*); 0,1 (*б*); 0,5 (*в*).

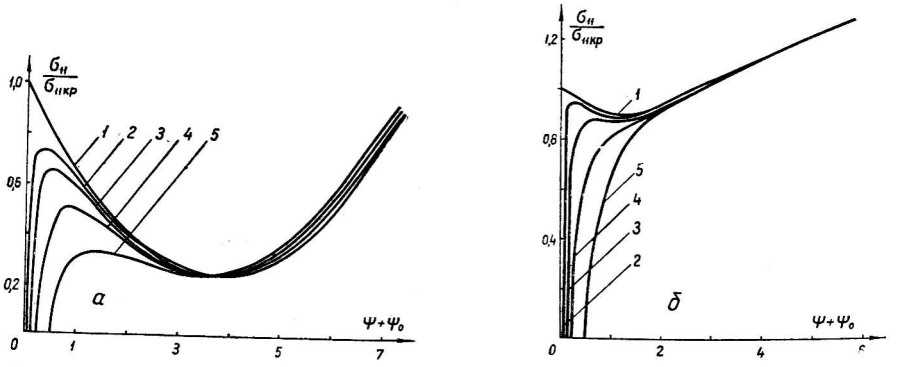


Рис. 3. $\psi_0=0$ (*1*); 0,05 (*2*); 0,1 (*3*); 0,25 (*4*); 0,5 (*5*). $\frac{a}{R}=0{,}25$. $\sigma_{11кр}=1400$ *кгс/см²* (*а*); 2800 *кгс/см²* (*б*).

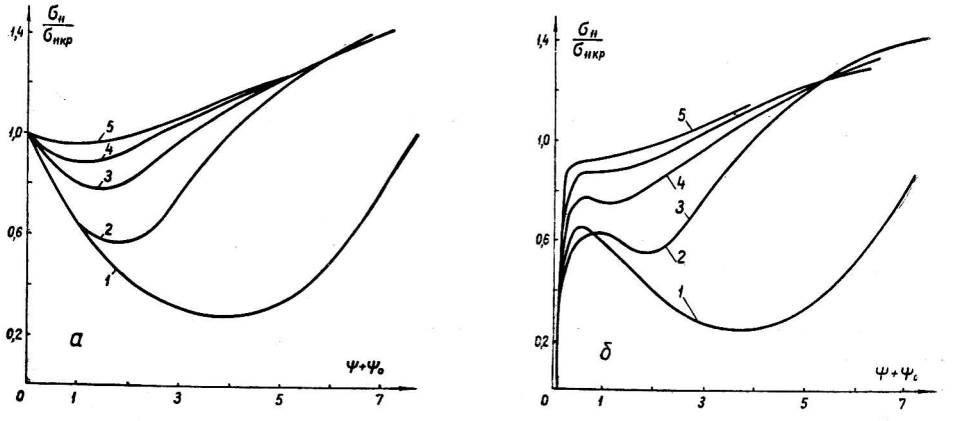


Рис. 4. $\sigma_{11кр}=1400$ *кгс/см²* (*1*); 2000 (*2*); 2400 (*3*); 2800 (*4*); 3200 (*5*). $\frac{a}{R}=0{,}25$. $\psi_0=0$ (*а*); 0,1 (*б*).

напряжение) (рис. 4 — *а*). Влияние начальных несовершенств имеет существенное значение для верхнего критического напряжения при упругих и слаборазвитых пластических деформациях (рис. 4 — *б*). С возрастанием пластических деформаций эффект начальных несовершенств уменьшается. Влияние начальных несовершенств на нижнее критическое напряжение несущественно (см. рисунки 3 — *б*, 5 — *б*).

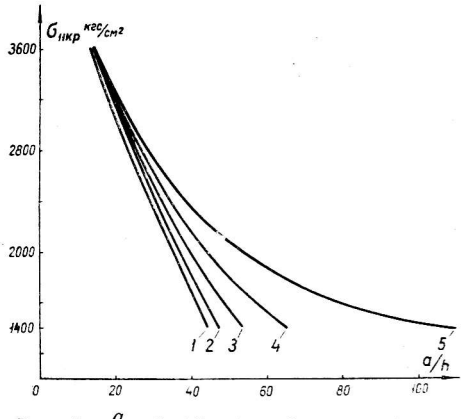


Рис. 5. $\frac{a}{R}=0$ (*1*); 0,1 (*2*); 0,15 (*3*); 0,2 (*4*); 0,25 (*5*).

Верхнее критическое напряжение при одном и том же отношении $\frac{a}{h}$ увеличивается с возрастанием параметра кривизны панели $\frac{a}{R}$ (рис. 5).

Интересен тот факт, что с развитием пластических деформаций влияние кривизны панели на увели-

чение критического напряженного состояния по сравнению с гладкой пластинкой сильно снижается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W.* Nat. Aer. Res. Inst., Reports a. Trans., 1955, **20**, Rep. S 476, 71.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М. 1956.
3. *Колтунов М. А.* Вестн. МГУ, 1962, 5.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М. 1967.
5. *Бабич И. Ю.* Прикл. мех., 1968, 12, *121.*
6. *Божинський А. Н.* Прикл. мех., 1963, **9**, 1, *25.*
7. *Тетерс Г. А.* Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1964, 2, *61.*
8. *Малмейстер А. К.* Мех. полим., 1965, 4, *12.*
9. *Малмейстер А. К.* Мех. полим., 1969, 1, *22.*
10. *Кнетс И. В., Крегерс А. Ф.* Мех. полим., 1967, 4, *636.*
11. *Кнетс И. В.* Мех. полим., 1969, **3**, *422.*
12. *Knets I. V.* Arch. Mech. Stosow., 1969, **21**, 3, *369.*
13. *Кнетс И. В.* Мех. полим., 1968, 5, *897.*
14. *Тетерс Г. А., Кнетс И. В.* Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1964, 1, *67.*
15. *Lee L. H. N., Ades C. S.* J. Aeron. Sci., 1957, **24**, 4, *241.*

Институт механики полимеров
АН Латвийской ССР, Рига

Поступило в редакцию
30 XI 1969