Теория и численные методы решения краевых задач дифференциальных уравнений

Тезисы докладов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.Л. Ионин, Е.Ф. Царьков, Ю.Э. Эрмантраут

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{L}(H)$ – пространство линейных непрерывных отображений из H в H. Рассматривается линейное стохастическое уравнение вида

$$dx(t) = A(y(t))x(t)\,dt + B(y(t))x(t)\,dw(t), \tag{I}$$

где $x \in H$, $A(y)$ и $B(y) \in \mathcal{L}(H)$, $y \in Y$, $w(t)$ – скалярный винеровский процесс. $y(t)$ – однородный марковский процесс с производящим оператором $\mathbb{T}$, конечным числом состояний $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$. Пара $(x(t), y(t))$ – является марковским процессом. Пусть $\mathcal{L}_0(H)$ – пространство самосопряженных операторов $\mathcal{L}(H)$, со скалярным произведением $(p,q)=\sum_{i=1}^{\infty}(p\varphi_i, q\varphi_i)$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots$ ортонормированный базис в H, $q,p\in\mathcal{L}(H)$. Рассмотрим пространство $\mathcal{K}\equiv\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_0(H), R^k)$ – линейных непрерывных отображений со скалярным произведением

$$\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = \sum_{j=1}^{k} (p(y_j), q(y_j)). \qquad (2)$$

где $\bar{p} = \mathrm{colon}(p(y_1), \ldots, p(y_k))$, $\bar{q} = \mathrm{colon}(q(y_1), \ldots, q(y_k))$.

В силу ограниченности операторов $A(y)$ и $B(y)$ можно определить однопараметрическое семейство операторов по правилу

$$(T(t)q)(y) = E\{X^*(t+s,s)q(y(t+s))X(t+s,s)/y(s)=y\} \qquad (3)$$

где $X(t)$ – оператор Коши уравнения (I).

Определение. Тривиальное решение (I) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если для всех $t\geq t_0\geq 0$, $y\in Y$, $x_0\in H$, выполняется неравенство

$$E\{|x(t,t_0,x_0)|^2/y(t_0)=y\} \leq M e^{-\gamma(t-t_0)}|x_0|^2 \qquad (4)$$

при некоторых $M>0$ и $\gamma>0$.
Обозначим $\mathcal{K}$ – конус элементов $q(y)\in\mathcal{K}$, $\mathring{\mathcal{K}}$ – внутренность конуса.

Теорема I. Семейство $\{T(t), t\geq 0\}$ является сильно непрерывной полугруппой линейных операторов, производящий оператор которой L определен на всем $\mathcal{K}$ и действует покомпонентно на $q(y)$ следующим образом:

$$L q(y_i) = A^*(y_i)q(y_i) + q(y_i)A(y_i) + B^*(y_i)q(y_i)B(y_i) + \Pi q(y_i). \qquad (5)$$

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

I. Тривиальное решение (I) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном;

2. Спектр оператора L расположен в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\,\lambda<0\}$;

3. Полугруппа $T(t)$ экспоненциально устойчива в слабой операторной топологии;

4. Существуют q_1 и $q_2\in\mathring{\mathcal{K}}$ такие, что $Lq_1 = -q_2$.