V VILNIUS CONFERENCE ON PROBABILITY THEORY

$E(X|\mathcal{F})$

1989

FIFTH INTERNATIONAL VILNIUS CONFERENCE ON PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

ABSTRACTS OF COMMUNICATIONS

ПЯТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ ВИЛЬНЮССКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

PENKTOJI VILNIAUS TARPTAUTINĖ TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS KONFERENCIJA

PRANEŠIMŲ TEZĖS

Т. III: А—Л

КОНЕЧНО АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ И МЕТОД РАСШИРЕНИЯ В ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

А.И. ЖДАНОК

Рижский политехнический институт
кафедра прикладной математики
226010, Рига, Аусекля, 9

Пусть (X,Σ) произвольное измеримое пространство ; в топологическом X обозначим $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{B}_X$ борелевские алгебру и σ-алгебру ; $B(X,\Sigma)$ и $C(X)$ – банаховы пространства ограниченных функций Σ -измеримых и непрерывных соответственно ; $ba(X,\Sigma)$. $ca(X,\Sigma)$, $rba(X,\Sigma)$ – банаховы пространства ограниченных мер на (X,Σ) соответственно конечно аддитивных, счетно аддитивных и регулярных конечно аддитивных. Если M – одно из пространств мер, то обозначим $S_M=\{\mu\in M: \mu\geq 0, \mu(X)=1\}$ (вероятностные меры).

Рассматриваются однородные марковские процессы (МП) с дискретным временем (цепи) на (X,Σ), заданные переходной функцией $p(x,E)$. МП определяет пару марковских операторов :

$$T: B(X,\Sigma)\to B(X,\Sigma)\ ,\ Tf(x)=\int f(y)\,p(x,dy),$$
$$A: ca(X,\Sigma)\to ca(X,\Sigma),\ A\mu(E)=\int p(x,E)\,\mu(dx).$$

Оператор A может быть продолжен с сохранением его аналитического вида на пространство $ba(X,\Sigma)$. Поскольку $B^*(X,\Sigma)=ba(X,\Sigma)$, то после продолжения $T^*=A$. Аналогичная процедура для феллеровского МП дает пару сопряжённых операторов $T: C(X)\to C(X)$, $A: rba(X,\mathcal{A}_X)\to rba(X,\mathcal{A}_X)$. Обозначим множество инвариантных мер МП $\Delta_M=\{\mu\in S_M: \mu=A\mu\}$. Для любого МП $\Delta_{ba}\neq\emptyset$, для феллеровского $\Delta_{rba}\neq\emptyset$.

Продолжение марковских операторов с пространства счетно аддитивных мер на пространство конечно аддитивных мер позволяет шире использовать методы функционального анализа и составляет основу представляемого в докладе метода исследования МП. Вместе с тем, техника работы с конечно аддитивными мерами намного сложнее, чем со счётно аддитивными. В этой связи строится и используется следующая процедура.

Пространство $B(X,\Sigma)$ как банахова алгебра изоморфна пространству $C(\gamma X)$, определенном на некотором бикомпакте γX. Само измеримое пространство (X,Σ) вкладывается в $(\gamma X, \mathcal{B}_\gamma)$, которое назовём гельфандовской компактификацией (X,Σ) (топология в X не предполагается). При этом все конечно аддитивные меры из $ba(X,\Sigma)$ переходят в счётно аддитивные из $rca(\gamma X, \mathcal{B}_\gamma)$. Марковские операторы T и A переходят в операторы $T_\gamma : C(\gamma X) \to C(\gamma X)$ и $A_\gamma : rca(\gamma X, \mathcal{B}_\gamma) \to rca(\gamma X, \mathcal{B}_\gamma)$ которые также имеют интегральное представление с некоторой переходной функцией $P_\gamma(x, E)$.

Итак, каждому МП соответствует феллеровский МП на некотором бикомпакте. Эта конструкция позволяет при изучении произвольных МП пользоваться хорошо развитой теорией феллеровских МП.

Описанный метод расширения дает ряд новых результатов в теории МП и проясняет некоторые известные факты. Приведем здесь лишь два утверждения, касающихся асимптотического поведения МП.

<u>Теорема I</u>. Для произвольного МП следующие условия эквивалентны:

I. МП удовлетворяет условию Дуба-Деблина (т.е. операторы T и A квазикомпактны).

2. $\Delta_{ba} \subset ca(X,\Sigma)$ (т.е. МП не имеет инвариантных чисто конечно аддитивных мер).

3. $\dim \Delta_{ba} < \infty$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть на метрическом X задан произвольный МП и $\mu \in S_{ca}$. Для того, чтобы для любой $\lambda \in S_{ba}$ средние $1/n \sum A^k \lambda$ слабо сходились к μ, необходимо и достаточно, чтобы для каждой $\eta \in \Delta_{ba}$ выполнялось $\int f d\eta = \int f d\mu$ для всех $f \in C(X)$ (в условиях не предполагается $\mu = A\mu$, но будет так для феллеровского МП).

Метод применим также и при изучении "конечно аддитивных МП", т.е. таких, у которых переходная вероятность конечно аддитивна.

Бо́льшая часть приводимых в докладе результатов предварительно представлена в работе [I], где дана и подробная библиография. Первые утверждения, полученные в рамках предлагаемого метода, были опубликованы автором в 1981 году.

ЛИТЕРАТУРА

I. Жданок А.И. Конечно аддитивные меры и метод расширения в эргодической теории цепей Маркова.-В кн.:Распределения на функциональных структурах.Киев,1987.С.19-37.-/Препринт/АН УССР.Ин-т матем.87.27/.