АКАДЕМИЯ НАУК СССР
АКАДЕМИЯ НАУК ЛИТОВСКОЙ ССР
ВИЛЬНЮССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.КАПСУКАСА

ВТОРАЯ ВИЛЬНЮССКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ВИЛЬНЮС, 28 июня - 3 июля, 1977

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
Т.I (А - Л)

ABSTRACTS OF COMMUNICATIONS

SECOND VILNIUS CONFERENCE ON PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

June - 28 - July 3, 1977, VILNIUS

Vilnius - 1977

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ф.Царьков (Рига)

Обозначим $a(x)$, $b(x)$ отображения $C([-h,0],R^n) \to R^n$, удовлетворяющие условию Липшица в форме $|a(x)-a(y)|^2+|b(x)-b(y)|^2 \le C\int_{-h}^{0}|x(\theta)-y(\theta)|^2 d\mu(\theta)$, где $\mu(\theta)$ - монотонная функция единичной вариации, причем $a(0)=b(0)=0$. Стохастическое дифференциально-функциональное уравнение

$$dx(t) = a(x_t)\,dt + b(x_t)\,dw(t), \qquad (I)$$

где $x_t=\{x(t+\theta),\ \theta\in[-h,0]\}$, $w(t)$ - процесс броуновского движения, определяет строго марковский процесс со значениями в $C([-h,0],R^n)$. Для исследования устойчивости тривиального решения (I) удобно ввести расширение $\mathcal{L}^+$ слабого производящего оператора $\mathcal{L}: \mathcal{B}\supset\mathcal{D}(\mathcal{L})\to\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ - пространство измеримых, ограниченных на каждом ограниченном множестве функционалов над $C([-h,0],R^n)$. Определим

$$\mathcal{L}^+v(x)=\lim_{t\to 0}\sup\frac{1}{t}\left(E\{v(x_{\tau_z(t)}(x))\}-v(x)\right),$$ где

$x_t(x)$ - решение (I) по начальным данным $x_0=x$, $\tau_z(t)=\min(\tau_z,t)$, τ_z - первый момент выхода из шара $U_z=\{\|y\|<z\}$, причем $x\in U_z$, а предел понимается в смысле слабой сходимости в $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{L}^+v(x)\le u(x)$, $u\in\mathcal{B}$, то $v\in\mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$

$$E\{v(x_{\tau_z(t)}(x))\}\le v(x)+E\left\{\int_0^{\tau_z(t)}u(x_s(x))\right\}ds$$

и это неравенство позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости тривиального решения (I). Определения устойчивост аналогичны [I], если вместо нормы в R^n поставить норму в $C([-h,0],R^n)$. Будем называть $v(x)$

функционалом Ляпунова-Красовского, если $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$ и существуют константы $c_1>0$, $c_2>0, p>0$ такие, что $c_1\|x\|^p \le v(x) \le c_2\|x\|^p$. Перечислим некоторые утверждения об устойчивости тривиального решения (I):

I) если $a(x)$ и $b(x)$ линейны, то существование функционала Ляпунова-Красовского такого, что $\mathcal{L}^+ v(x) \le 0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости по вероятности;

2) если $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$, $b(x) = b_0(x) + b_1(x)$ $a_0(x)$ и $b_0(x)$ - линейны, то из асимптотической устойчивости по вероятности линейной системы следует устойчивость по вероятности нелинейной при определенной малости a_1 и b_1;

3) для p-устойчивости тривиального решения (I) существование (с данным $p>0$) функционала Ляпунова-Красовского такого, что $\mathcal{L}^+ v(x) \le 0$ является необходимым и достаточным условием.

Кроме того при помощи $\mathcal{L}^+$ можно указать "знаковые" критерии существования решения (I) и доказать справедливость высказанных выше утверждений, заменив глобальное условие Липшица, локальным.

В случае линейных $a(x)$ и $b(x)$ удается получить полную информацию об устойчивости либо неустойчивости тривиального решения (I) в среднем квадратичном, построив полугруппу операторов $T(t)$, ставящих в соответствие оператору ковариации q некоторой гауссовской начальной функции x оператор ковариации q_t решения $x_t(x)$. Обозначим $\mathcal{K}$ конус положительных ядер в пространстве $\mathcal{M}$ симметричных непрерывных функций на $Q = \{[-h,0]\times[-h,0]\}$, $\mathcal{K}^*$ - соответствующий конус положительных на $\mathcal{M}$ функционалов. Пусть R - потенциал, а A - производящий оператор полугруппы $T(t)$. Следующие утверждения эквивалентны: а) тривиальное решение (I) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном; б) $\mathcal{D}(R) \supset \mathcal{K}$; в) $\sigma(A) \subset \{Re\lambda<0\}$; г) $\|T(t)\| \le M e^{-\beta t}$, $\beta>0$; д) $Aq = \beta q$ не имеет в $\mathcal{K}$ решений при $\beta \ge 0$; е) существует $p \in \mathcal{K}^*$ такой, что $(px,x) \ge |x(0)|^2$, $v(x) = (px,x) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, причем

$\mathcal{L}[(px,x)] \leq -|x(0)|^2$, где (ℓ,x) - скалярное произведение элементов $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^*$. Кроме того вид оператора $\mathcal{A}$ позволяет получать достаточные условия устойчивости тривиального решения (I), использующее тот факт, что норма в лежит в области определения $\mathcal{A}^+$ расширения $\mathcal{A}$, аналогичного описанному выше расширению $\mathcal{L}$.

ЛИТЕРАТУРА.

I. Р.З.Хасьминский. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров, М., Наука, 1969.